Devoir n°5

Groupe des isométries préservant une figure.

(à rendre le 5 mars 2007)

Soit E l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure naturelle d'espace affine euclidien. Soit $X \subset E$ l'ensemble des points (x, y, z) avec x, y, z entiers relatifs et $x+y+z \in \{0,1\}$. On se propose d'étudier l'ensemble G des isométries affines f de E qui préservent X, c'est à dire telles que $g(X) = X$.

On notera X_0 (resp. X_1) l'ensemble des $(x, y, z) \in X$ tels que $x + y + z = 0$ (resp. $x + y + z = 1$). On notera aussi P_0 (resp. P_1) l'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x + y + z = 0$ (resp. $x + y + z = 1$).

1) Déterminer l'intersection de X avec la boule fermée de centre $\omega = (0, 0, 0)$ et de rayon 1. En déduire que si $f \in G$ vérifie $f(\omega) = \omega$ alors $f(P_1) = P_1$ puis $f(X_1) = X_1$ et $f(X_0) = X_0$.

2) Vérifier que G est un sous-groupe de $\mathrm{Is}(E)$, c'est à dire que G est stable par composition et par passage à l'inverse.

3) On considère les six points suivants de X : $a_1 = \omega, a_2 = (1, 0, 0), a_3 = (1, 0, -1), a_4 = (1, 1, -1), a_5 = (0, 1, -1), a_6 = (0, 1, 0)$, et on pose $H = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$. Soit D le groupe des isométries f de E telles que $f(H) = H$.

3-a) Montrer que si $f \in D$ alors $\vec{f}$ préserve l'ensemble $\{(1, 0, 0), (-1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$. En déduire que $\vec{f}$ préserve l'ensemble des vecteurs (x, y, z) avec $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

3-b) Montrer que H contient exactement deux triangles équilatéraux : $a_1a_3a_5$ et $a_2a_4a_6$. En déduire que si $f \in D$ et $f(x, y, z) = (x', y', z')$ alors $x'+y'+z' = x+y+z$ ou $1-(x+y+z)$.

3-c) Déduire de ce qui précède que $D = \{f \in G, f(H) = H\}$.

3-d) Faire la liste de tous les éléments de D et les décrire géométriquement (nature, éléments caractéristiques).

4) Translations de G.

4-a) Montrer que si $t_{\vec{u}}$ est une translation de G, alors $\vec{u} \in X_0$ et t préserve simultanément X_0 et X_1.

4-b) Déterminer $T(E) \cap G$, c'est à dire le sous-groupe des translations de G.

4-c) Montrer que si $f \in G$ envoie un point de X_0 dans X_0 alors $f(X_0) = X_0$ et $f(X_1) = X_1$ (on pourra remarquer qu'il existe deux translations t_1, t_2 de G telles que $(t_1 \circ f \circ t_2)(\omega) = \omega$).

5) Symétries centrales de G.

5-a) Montrer que si p et q sont tous les deux dans X_0 (ou tous les deux dans X_1) alors aucune symétrie centrale s de G n'échange p et q.

5-b) Montrer qu'une symétrie centrale s de centre a est dans G ssi $a = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2})$ avec x, y, z entiers relatifs de somme égale à 1.

5-c) Quel est le sous-espace affine $P_{\frac{1}{2}}$ engendré par les centres des symétries centrales de G ? Pour $f \in G$ et s une symétrie centrale de G, que dire de fsf^{-1} ? En déduire que tout élément $f \in G$ vérifie $f(P_{\frac{1}{2}}) = P_{\frac{1}{2}}$ et $\vec{f}(P_0) = P_0$.

6) Pour chaque type possible d'isométrie de l'espace, dire si G contient un élément de ce type et décrire précisément une isométrie $g \in G$ du type donné.