Devoir n^{o}3
D'une droite à une autre.
(à rendre le 24/04/2007)

Remarque importante. *Le problème forme un tout. Pour répondre à une question on peut réutiliser les propriétés énoncées dans une question précédente. On recommande fortement d'accompagner chaque raisonnement d'un petit dessin.*

On veut étudier le comportement des solutions d'une équation différentielle autonome

$$(E)\ X'(t) \,=\, F(X(t))$$

où $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une fonction localement Lipschitzienne satisfaisant diverses hypothèses géométriques. On pose $F(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$.

On note

- D la droite de $\mathbb{R}^2$ définie par l'équation $y = 0$
- D' la droite de $\mathbb{R}^2$ définie par l'équation $y = \alpha x + \beta$ (avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ un couple de réel fixé tel que $\alpha \geq 0, \beta > 0$)
- R la région de $\mathbb{R}^2$ définie par $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq y \leq \alpha x + \beta\}$

On suppose que :

i) $g(x,y) > 0$ pour tout point (x,y) dans la région R
ii) $g(x,y) - \alpha f(x,y) > 0$ pour tout point (x,y) sur la demi-droite $R \cap D'$

1) Montrer que pour $F(x,y) = (x, (2+x)\exp(y-x-1))$ et D' d'équation $y = x+1$ les hypothèses précédentes sont satisfaites. Représenter D, D' et dessiner les vecteurs joignant $M = (x,y)$ à $M + F(x,y)$ pour $(x,y) \in \{(-1,0),(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(1,2)\}$. Que dire de F le long de l'axe des y ? Pour une fonction F quelconque, interprêter les conditions i) et ii) en terme de produit scalaire du vecteur $F(x,y)$ avec le vecteur normal à la droite D (ou D').

La fonction $F(x,y) = (x, (2+x)\exp(y-x-1))$ est-elle Lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$? Déterminer la solution maximale de (E) telle que $X(0) = (0,0)$.

Dans la suite on suppose que F est (globalement) Lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$.

2) Quel est l'intervalle de définition des solutions maximales de (E) ?

3) Soit $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une solution maximale de (E) telle que $X(t) \in R$ pour tout $t \in [a,b]$. Montrer que la deuxième composante $y(t)$ de $X(t)$ est strictement croissante sur $[a,b]$. Montrer que si $I \subset [a,b]$ est un intervalle tel que pour tout $t \in I$ le point $X(t)$ reste dans une région compacte $K \subset R$ alors il existe une constante $c > 0$ telle que $y'(t) \geq c$ pour tout $t \in I$. En déduire que X finit par sortir de n'importe quelle partie compacte de R : pour toute partie $K \subset R$ compacte si pour un certain temps $t_0 \in \mathbb{R}$ on a $X(t_0) \in K$ alors il existe un temps $t_1 > t_0$ tel que $X(t_1) \notin K$. (On pourra commencer par montrer que si K est compacte alors $(x,y) \mapsto y$ est bornée sur K.)

4-a) Soit $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une solution de (E), telle que $X(t_0) = (x_0, 0)$ avec $x_0 > -\frac{\beta}{\alpha}$ (si $\alpha \neq 0$).

Montrer qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que

- pour tout $t \in]t_0, t_0+\varepsilon[$ on a $X(t) \in R \setminus D$
- pour tout $t \in]t_0-\varepsilon, t_0[$ on a $X(t) \notin R$

4-b) Soit $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une solution de (E), telle que $X(t_1) = (x_1, y_1)$ avec $y_1 = \alpha x_1 + \beta$ et $x_1 > -\frac{\beta}{\alpha}$ (si $\alpha \neq 0$).

Montrer qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que

- pour tout $t \in]t_1, t_1 + \varepsilon[$ on a $X(t) \notin R$
- pour tout $t \in]t_1 - \varepsilon, t_1[$ on a $X(t) \in R \setminus D'$

5) Soit $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une solution de (E) telle qu'il existe $t_2 > 0 \in I$ avec $X(0) \in R \setminus D'$ et $X(t_2) \notin R$. On pose $X(t) = (x(t), y(t))$.

5-a) Soit $t_1 = \inf\{t \in [0, t_2]$ tels que $X(t) \notin R\}$. Montrer qu'alors il existe un $\varepsilon > 0$ tels que $X(t) \in R \setminus D'$ pour $t \in [0, t_1[$, $X(t_1) \in R \cap D'$ et pour $t \in]t_1, t_1 + \varepsilon[$ on a $X(t) \notin R$.

On suppose de plus $X(0) = (x_0, y_0) \in D \setminus D'$. On note alors F la région définie par $F = \{(x, y) \in R$ et $\exists t \in [0, t_1], y = y(t), x \leq x(t)\}$ (c'est donc la partie de R située à gauche de la courbe $(X(t))_{t \in [0, t_1]}$). Puis on pose $O = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < y < \alpha x + \beta$ et $\exists t \in [0, t_1], y = y(t), x < x(t)\}$.

5-b-i) Représenter F sur le dessin de la question 1) pour la solution X telle que $X(0) = (0, 0)$. Montrer que F est compacte ssi $\alpha \neq 0$.

5-b-ii) (Lemme de passage des frontières) Montrer que si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ est continue et vérifie $\gamma(a) \in O$, $\gamma(b) \notin F$ alors il existe $s \in]a, b[$ tel que $\gamma([a, s[) \subset O$ et ou bien $\gamma(s) \in D$, ou bien $\gamma(s) \in D'$, ou bien il existe $t \in [0, t_1]$ tel que $\gamma(s) = X(t)$ (on pourra considérer $s = \inf\{t \in [a, b]$ tel que $\gamma(t)$ n'est pas dans $O\}$).

5-c-i) Question de cours : montrer que si deux solutions X_1, X_2 sur $\mathbb{R}$ se croisent (i.e. il existe deux temps s_1, s_2 tels que $X(s_1) = X(s_2)$) alors il existe un s tel que pour tout réel t on a $X_2(t) = X_1(t + s)$.

5-c-ii) Application. On suppose ici que $\alpha \neq 0$ et que $X_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est une solution telle que $X_1(0) = (x_1, 0)$ avec $-\frac{\beta}{\alpha} < x_1 < x_0$.

Montrer d'abord qu'il existe un temps $t_2' > 0$ tel que $X_1(t_2') \notin F$.

Puis montrer qu'il existe un temps $t_1' > 0$ tel que $X_1(t) \in O$ pour $t \in]0, t_1[$, $X_1(t_1') \in R \cap D'$ et $y_1(t_1') < y(t_1)$.