Devoir n°2
Pentagones affines réguliers.
(à rendre le 6 Novembre)

Soient a, b, c, d, e cinq points deux à deux distincts d'un plan affine E de plan vectoriel sous-jacent $\vec{E}$. On suppose que le pentagone $abcde$ est non dégénéré : les cinq points ne sont pas sur une même droite. On note a', b', c', d', e' les milieux de $[cd], [de], [ea], [ab], [bc]$.

1) Dans cette question on suppose que $(ab) \parallel (ce), (bc) \parallel (da), (cd) \parallel (eb), (de) \parallel (ac), (ea) \parallel (bd)$. On définit le point a_1 par la relation $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ea_1}$.

1-a) Soit a_2 le milieu de $[eb]$. Montrer que a, a_2, a_1 et a' sont alignés.

1-b) Montrer que l'isobarycentre g des points a, b, c, d, e est à l'intersection des médianes $(aa'), (bb'), (cc'), (dd'), (ee')$ (on admettra que l'hypothèse $abcde$ non dégénéré implique, avec l'hypothèse de parallélisme, que $a \neq a'$, $b \neq b'$, etc...; ceci implique d'ailleurs que g, a, b ne sont pas alignés).

1-c) Soit ω le réel tel que $\overrightarrow{ec} = \omega \overrightarrow{ea_1}$.

1-c-i) Montrer que $\overrightarrow{eb} = \frac{1}{1-\omega} \overrightarrow{cd}$.

1-c-ii) Soit b_1 le point tel que $\overrightarrow{ba} = \overrightarrow{cb_1}$. Montrer qu'on a aussi $\overrightarrow{ce} = \omega \overrightarrow{cb_1}$, et en déduire que $\frac{\overrightarrow{ec}}{\overrightarrow{ba}} = \frac{1}{1-\omega}$.

1-c-iii) En calculant d'une autre façon $\frac{\overrightarrow{ec}}{\overrightarrow{ba}}$, montrer que ω est solution de l'équation $\omega^2 = \omega + 1$.

Donner deux exemples de pentagones $abcde$ non dégénérés dans le plan complexe satisfaisant l'hypothèse de parallélisme, où la constante ω est respectivement positive puis négative.

2) Dans cette question on suppose que les médianes $(aa'), (bb'), (cc'), (dd'), (ee')$ sont définies ($a \neq a'$, $b \neq b'$, etc...), sont concourantes en un point g, et que g, a, b ne sont pas alignés. On introduit les coordonnées cartésiennes suivantes dans le repère $\mathcal{R} = (g, a, b)$:

$$a' \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}, b' \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}, d \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

2-a) Déterminer les coordonnées de d', c, e, c', e'.

2-b) Quelle relation exprime l'alignement de g, d, d' ? Quelle relation exprime l'alignement de g, c, c' ? Quelle relation exprime l'alignement de g, e, e' ? Montrer par un exemple que (ab) et (ce) peuvent être sécantes.

2-c) Dans cette question on suppose en plus que g est l'isobarycentre de a, b, c, d, e.

2-c-i) Montrer qu'alors $(ab) \parallel (ce), (bc) \parallel (da), (cd) \parallel (eb), (de) \parallel (ac), (ea) \parallel (bd)$ et calculer le rapport ω correspondant en fonction de α.

2-c-ii) Montrer que $a'b'c'd'e'$ est homothétique de $abcde$ (donner le centre et le rapport).