Etude d'une application affine de l'espace.
Devoir n°2. A rendre le 5 novembre.

Soit E un espace affine de dimension 3, d'espace vectoriel sous-jacent $\vec{E}$, rapporté à un repère $\mathcal{R} = (a, b, c, d)$. Tous les systèmes d'équations cartésiennes seront relatifs aux coordonnées dans $\mathcal{R}$. On note $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base $\vec{\mathcal{R}} = (\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}, \overrightarrow{ad})$.
Soit α un paramètre réel. On considère l'application f de E dans E qui au point de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ associe le point de coordonnées $\begin{pmatrix} (4\alpha-1)x + 2y - 3z + 4 \\ y - z \\ (2\alpha-1)x + y - 2z + 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$.

1) Montrer que $f : E \to E$ est affine et déterminer la matrice A de $\vec{f}$ dans $\vec{\mathcal{R}}$.
Pour quelles valeurs du paramètre α l'application $\vec{f}$ est-elle bijective ? diagonalisable sur $\mathbb{R}$? (on pourra vérifier que 1 est valeur propre). Quels sont les points fixes de f ?

2) Dans cette question on suppose $\alpha = 0$. Montrer que $P = f(E)$ est un plan invariant de E, en donner une équation cartésienne. Déterminer $f(P')$ pour tout plan P' parallèle à P. Montrer que si D est une droite invariante par f, alors ses vecteurs directeurs sont vecteurs propres de $\vec{f}$ pour la valeur propre 1 (on pourra étudier les points fixes de f sur D). Résoudre l'équation $\vec{f}(\overrightarrow{mf(m)}) = \overrightarrow{mf(m)}$, en déduire que f admet une unique droite invariante qu'on décrira paramétriquement.

Dans la fin du problème on suppose $\alpha = 1$.

3) Soit P le plan d'équation $x + y + z = 1$. Montrer que l'image de P par f est un plan P', et donner une équation cartésienne de P'.
Montrer de même que l'image D' de la droite D passant par c de vecteur directeur $\vec{i} + \vec{k}$ est une droite, dont on donnera un système d'équations cartésiennes.

4-a) Montrer que le plan P_0 de E d'équation $x + y - z = -1$ est invariant par f.
4-b) Montrer que f préserve l'ensemble $\mathcal{P}_0$ des plans parallèles à P_0. Montrer que le seul plan de $\mathcal{P}_0$ préservé par f est P_0.

5-a) Montrer que la droite D_0 de E passant par d et de vecteur directeur $\vec{i} - \vec{j}$ est invariante par f. Montrer que $f_{|D_0}$ coïncide avec une translation t qu'on précisera. Montrer que $g = t^{-1} \circ f$ est une application affine fixant un point et commutant avec f.
5-b) Montrer que $D_0 \subset P_0$. Montrer que $\vec{f}_{|\vec{P}_0}$ est une symétrie axiale de $\vec{P}_0$, puis diagonaliser $\vec{f}$. Montrer que la seule droite de P_0 invariante par f est D_0. L'application affine $f_{|P_0}$ est-elle une symétrie ?
5-c) Quelles sont les droites de E envoyées par f sur une droite parallèle ? Montrer qu'une droite D non faiblement parallèle à P_0 n'est jamais invariante par f. Montrer que D_0 est la seule droite de E invariante par f.
5-d) Montrer qu'il existe un unique plan P non parallèle à P_0 et invariant par f.