Devoir n° 1: théorème de Pappus et homothéties. (à rendre le 08-10-2007)

Dans tout l'exercice $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ désignent neuf points d'un espace affine E. On suppose que les triplets de points suivants sont distincts et alignés :

a, b', c'' ; a, b'', c' ; a', b, c'' ; a', b'', c ; a'', b, c' ; a'', b', c .

En notant $h_{x,y\longrightarrow z}$ l'unique homothétie de E de centre x envoyant y sur z (lorsque $x \neq y$ et $z \in (xy)$), on pose :

- $f_1 = h_{b,c'\longrightarrow a''} \circ h_{a,b''\longrightarrow c'}$, $f_2 = h_{c,a'\longrightarrow b''} \circ h_{b,c''\longrightarrow a'}$, $f_3 = h_{a,b'\longrightarrow c''} \circ h_{c,a''\longrightarrow b'}$ et $\varphi = f_1 \circ f_2 \circ f_3$;

- $f_1' = h_{b',c''\longrightarrow a} \circ h_{a',b\longrightarrow c''}$, $f_2' = h_{c',a''\longrightarrow b} \circ h_{b',c\longrightarrow a''}$, $f_3' = h_{a',b''\longrightarrow c} \circ h_{c',a\longrightarrow b''}$ et $\varphi' = f_1' \circ f_2' \circ f_3'$;

- $f_1'' = h_{b'',c\longrightarrow a'} \circ h_{a'',b'\longrightarrow c}$, $f_2'' = h_{c'',a\longrightarrow b'} \circ h_{b'',c'\longrightarrow a}$, $f_3'' = h_{a'',b\longrightarrow c'} \circ h_{c'',a'\longrightarrow b}$ et $\varphi'' = f_1'' \circ f_2'' \circ f_3''$;

- $g_1 = h_{a'',b'\longrightarrow c} \circ h_{a'',b\longrightarrow c'}$, $g_2 = h_{b'',c'\longrightarrow a} \circ h_{b'',c\longrightarrow a'}$, $g_3 = h_{c'',a'\longrightarrow b} \circ h_{c'',a\longrightarrow b'}$, et $\psi = g_2 \circ g_1 \circ g_3$.

1) Questions préliminaires.

1-a) Montrer que si x, y, z sont distincts alignés, alors $h_{y,z\longrightarrow x} \circ h_{x,y\longrightarrow z} \circ h_{z,x\longrightarrow y}$ est la symétrie centrale de centre x.

1-b) Soient x, y, z, p, q, r six points distincts de E tels que $p \in (xq)$, $r \in (yq)$ et $\{z\} = (rp) \cap (xy)$. Montrer que $h_{y,q\longrightarrow r} \circ h_{x,p\longrightarrow q} = h_{z,p\longrightarrow r}$.

1-c) Montrer que si le produit de trois homothéties différentes de l'identité est l'identité, alors leurs centres sont alignés.

2) Montrer que $\varphi'' \circ \varphi' \circ \varphi$ est une translation (en utilisant 1-a), on pourra montrer qu'elle a le même rapport que le produit de six symétries centrales).

3) Montrer que ψ et φ'' ont même rapport.

4) Dans cette question on suppose a, b, c alignés sur une droite D.

4-a) Montrer que $\varphi(D) = D$ et que φ est une homothétie de centre a''.

4-b) On pose $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_2 = f_2 \circ f_3 \circ f_1$ et $\varphi_3 = f_3 \circ f_1 \circ f_2$. Montrer que si φ_1, φ_2 ou φ_3 est l'identité, alors $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \mathrm{id}_E$.

4-c) Déduire de ce qui précède que, si on suppose de plus $\{a'', b'', c''\} \not\subset D$, alors $\varphi = \mathrm{id}_E$.

5) Dans cette question on démontre le résultat suivant (théorème de Pappus):

si a, b, c sont alignés sur une droite D et a', b', c' sont alignés sur une droite $D' \neq D$, alors a'', b'', c'' sont alignés.

Il n'y a rien à démontrer si deux des points a'', b'', c'' sont confondus : on les suppose donc deux à deux distincts. Pour simplifier, **on suppose D et D' sécantes.**

5-a) Montrer que $\{a'', b'', c''\} \not\subset D$ et $\{a'', b'', c''\} \not\subset D'$. Montrer que le sous-espace affine engendré par $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ est un plan.

Déduire de ce qui précède que $\varphi = \varphi' = \mathrm{id}_E$, puis que $\varphi'' = \mathrm{id}_E$.

On note D_1, D_2, D_3 (resp: D_1', D_2', D_3') les parallèles à D (resp. à D') passant par a', b', c' (resp. a, b, c).

5-b) Montrer que $g_i(D_{i+1}') = D_{i+2}'$ (indices modulo 3). En déduire que g_1, g_2, g_3 sont des homothéties non triviales. Montrer qu'on a aussi $g_i(D_{i+1}) = D_{i+2}$ (indices modulo 3 - on remarquera que les expressions définissant les g_i sont commutatives)

5-c) Montrer que $\psi(D_1) = D_1$, $\psi(D_1') = D_1'$. En déduire que $\psi = \mathrm{id}_E$ et conclure.