Devoir 3 : Théorème de Ménélaus et affinités.

(à rendre au plus tard le 13-12-2002)

Soit a, b, c trois points distincts non alignés d'un plan affine E. On considère trois points p, q, r sur $(bc), (ac), (ab)$, on suppose $p \notin \{b, c\}$, $q \notin \{a, c\}$, $r \notin \{a, b\}$. On introduit les réels α, β, γ qui multipliés par $\overrightarrow{pb}, \overrightarrow{qc}, \overrightarrow{ra}$ donnent $\overrightarrow{pc}, \overrightarrow{qa}, \overrightarrow{rb}$. On veut montrer le résultat suivant (théorème de Ménélaus) :

$$p, q, r \text{ sont alignés} \iff \alpha.\beta.\gamma = 1$$

1) Préliminaires : affinités de E.

1-a) Soit D une droite de E, $\vec{\Delta}$ une droite de $\vec{E}$, supplémentaire de $\vec{D}$, et k un nombre réel. On appelle *affinité d'axe D, de direction $\vec{\Delta}$, de rapport k* l'application $f_{D,\vec{\Delta},k}$ de E dans E envoyant un point m sur $h_{p(m),k}(m)$ (avec $p(m)$ le projeté de m sur D parallèlement à $\vec{\Delta}$ et $h_{\omega,\kappa}$ l'homothétie de centre ω et de rapport κ).

Montrer que $f_{D,\vec{\Delta},k}$ fixe tous les points de D, qu'elle est affine et que les droites $\vec{D}$ et $\vec{\Delta}$ sont des droites propres de $\vec{f}$; donner aussi les valeurs propres associées.

1-b) Soit $f : E \to E$ une application affine. On suppose qu'il existe une droite D et un point m de E tels que f fixe tous les points de D et $\overrightarrow{mf(m)} \notin \vec{D}$. Soit m' le point de concours de $(mf(m))$ avec D.

Montrer que f est une affinité d'axe D et exprimer le rapport de f en fonction des points $m, f(m), m'$.

2) Vérifier que $p \neq q$.

Dans la suite on pose $f = f_{(pq),\mathbb{R}\overrightarrow{(bc)},\alpha}$, $g = f_{(pq),\mathbb{R}\overrightarrow{(ac)},\beta}$ et $h = g \circ f$.

3) Montrer que (ab) est parallèle à (pq) si et seulement si $\alpha.\beta = 1$. Dans ce cas, h est-elle une affinité ?

4) Montrer que si (ab) n'est pas parallèle à (pq) alors h est une affinité d'axe (pq). Soit r' le point de concours de (ab) avec (pq) : exprimer le rapport de h en fonction de a, b, r'. Enfin montrer que ce rapport vaut $\alpha.\beta$.

5) Montrer le théorème de Ménélaus.