

ASPECTS COMBINATOIRES DE LA THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES GROUPES.

FRÉDÉRIC HAGLUND

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction.	2
Partie 1. Groupes de Coxeter et Géométrie du Complexe de Davis.	8
2. Rappels sur les groupes de Coxeter et leurs complexes de Davis.	8
3. Une caractérisation locale du complexe de Davis.	10
4. Géométries du complexe de Davis.	11
4.1. Moitiés, murs, hyperplans.	12
4.2. Convexité.	12
5. Le groupe d'automorphismes du complexe de Davis.	17
5.1. Groupes simples d'automorphismes du complexe de Davis.	17
5.2. Densité du commensurateur de W .	17
5.3. Réseaux uniformes commensurables avec W .	18
6. Groupes de Coxeter à angles droits.	20
Partie 2. Immeubles.	21
7. Définition et généralités.	21
8. Constructions d'immeubles et de complexes polygonaux $CAT(0)$.	23
9. Immeubles à angles droits.	27
Partie 3. Espaces à murs, complexes cubiques $CAT(0)$, espaces médians.	29
10. Espaces à murs.	29
10.1. Définitions, premières propriétés.	29
10.2. Exemples.	30
10.3. Complexes cubiques $CAT(0)$.	31
11. Actions spéciales sur un complexe cubique $CAT(0)$.	37
12. Espaces à murs mesurés, espaces médians.	41
Partie 4. Géométrie combinatoire de certains complexes simpliciaux.	45
13. Distance combinatoire, boules, hypothèses de convexité.	45
14. Séparabilité des sous-groupes quasi-convexes dans certains groupes à $K_{\text{comb}} < 0$.	47

Partie 5. Travaux en cours et projets.	48
15. Au bord des complexes cubiques $CAT(0)$.	48
15.1. Barycentre combinatoire.	48
15.2. Structure conforme et birapport au bord.	49
15.3. Espaces de Menger comme bord.	50
16. Complexes cubiques spéciaux : suite.	50
16.1. Etude de certains cas particuliers.	51
16.2. Amalgames de complexes cubiques spéciaux.	51
16.3. Groupes de surface dans les groupes cubiques spéciaux.	52
17. Groupes de Coxeter à angles droits.	52
18. Cubulations.	52
18.1. Complexes systoliques ultra-pavables de Januszkiewicz-Swiątkowski.	53
18.2. Convexes divisibles de Benoist.	53
18.3. Réseaux uniformes de l'espace hyperbolique réel.	53
Références	54

1. INTRODUCTION.

En théorie géométrique des groupes, on considère une action par isométries d'un groupe Γ sur un espace métrique X , et en fonction des qualités de l'action, on cherche à relier les propriétés (algébriques) du groupe Γ aux propriétés (métriques) de l'espace X . Une telle action est dite *géométrique* lorsqu'elle est propre et à quotient compact. Par exemple tout groupe de type fini agit géométriquement sur un de ses graphes de Cayley. Tous les espaces métriques géodésiques admettant une action géométrique d'un même groupe Γ sont quasi-isométriques, et tous les groupes de type fini agissant géométriquement sur un même espace géodésique ont des graphes de Cayley quasi-isométriques.

Cette approche de la théorie des groupes a été systématisée par M. Gromov (cf. [22], [34], [35]). Une classe de groupes de type fini est devenue centrale : les groupes hyperboliques, c'est-à-dire ceux dont un (tout) graphe de Cayley est un espace hyperbolique au sens de Gromov (vu de loin, tout triangle géodésique de ce graphe ressemble à un tripode, i.e. un triangle géodésique d'un arbre). L'importance de ces groupes tient à leur omniprésence : statistiquement, les groupes hyperboliques sont très nombreux (pour des énoncés précis, cf [34], [58], [16]). L'étude des groupes hyperboliques généraux a été poussée très loin (voir [34], [61], [62], [6], [64], [71], [72], [73], [26], [27], [60], [10]). Les ouvrages [33] et [2] constituent une excellente introduction à la théorie générale des groupes hyperboliques. La seule hypothèse d'hyperbolicité assure par exemple les propriétés suivantes :

- les groupes hyperboliques sont de présentation finie, ne contiennent pas de sous-groupes abéliens libres de rang 2 ;

- ils ont un problème du mot résoluble ;
- ils ont un nombre fini de classes de conjugaison d'éléments de torsion ;
- ils sont finis, contiennent un sous-groupe cyclique d'indice fini ou contiennent un groupe libre non abélien etc...

Mais certaines questions restent ouvertes :

Problème ouvert 1.1. Tous les groupes hyperboliques sont-ils résiduellement finis ?

Les groupes hyperboliques généralisent simultanément les groupes libres et les groupes fondamentaux de variétés compactes à courbure sectionnelle ≤ -1 . En fait on obtient une classe particulière de groupes hyperboliques en considérant les groupes agissant géométriquement sur les espaces $CAT(-1)$, ou les espaces $CAT(0)$ sans copie isométrique du plan euclidien \mathbb{R}^2 . Rappelons qu'un espace métrique X est dit $CAT(\kappa)$ s'il est géodésique et si tout triangle géodésique de X est plus fin que le triangle de comparaison correspondant dans le plan riemannien à courbure constante κ . Nous renvoyons le lecteur à [11] pour toutes les définitions et tous les énoncés classiques sur la géométrie $CAT(0)$. On dit souvent qu'un groupe de type fini est $CAT(0)$ s'il admet une action géométrique sur un espace $CAT(0)$. Les groupes $CAT(0)$ sont des représentants essentiels d'une théorie pas encore advenue : celle des groupes semi-hyperboliques. Les espaces $CAT(0)$ se comportent aussi bien que des variétés de Hadamard, et il y a des exemples très variés de groupes $CAT(0)$. Aussi l'étude des groupes $CAT(0)$ occupe t-elle actuellement une place centrale en théorie géométrique des groupes.

Relativement au problème 1.1, la croyance générale est qu'il existe des groupes hyperboliques non résiduellement finis, et peut-être même qu'une construction aléatoire fournit des contre-exemples. Pour le moment l'approche aléatoire n'a pas abouti, et il est raisonnable d'étudier la finitude résiduelle des groupes hyperboliques sous des hypothèses supplémentaires, dont la première serait $CAT(0)$. En fait il n'est pas sûr que cette restriction en soit une :

Problème ouvert 1.2. Tout groupe hyperbolique est-il $CAT(0)$?

Ainsi pour restreindre véritablement la classe des groupes étudiés on peut considérer des espaces $CAT(0)$ plus particuliers : les complexes simpliciaux (ou polyèdraux) $CAT(0)$. D'une part, la classe des groupes hyperboliques polyèdraux $CAT(0)$ reste très vaste, donc elle peut contenir des contre-exemples : ainsi Burger-Mozes ([13]) et Wise ([78]) ont construit des groupes non résiduellement finis - non hyperboliques - agissant géométriquement sur un espace $CAT(0)$ (le produit de deux arbres). D'autre part, il existe peut-être des classes intéressantes de groupes hyperboliques polyèdraux $CAT(0)$ qui au contraire sont tous résiduellement finis. Par exemple dans [79] Daniel Wise a montré que les groupes agissant géométriquement sur certains complexes polygonaux sont tous résiduellement finis.

Les prototypes des groupes polyèdraux $CAT(0)$ possédant les plus fortes propriétés possibles (dont la linéarité, donc la finitude résiduelle), ce sont les groupes dits "de Coxeter", c'est-à-dire les groupes engendrés par des involutions avec pour relations

génératrices des relations de tresse entre certaines paires d'éléments. H.S.M. Coxeter avait surtout considéré des groupes discrets engendrés par réflexions dans les espaces à courbure constante. De sorte que l'étude (sinon la définition) des groupes de Coxeter généraux (en tant que groupes de Weyl généralisés) est plutôt due à J. Tits, justement l'un des principaux prédécesseurs de Gromov dans l'étude des groupes par leurs actions sur des espaces singuliers (cf. [74], [77], [75]). Tits a systématiquement étudié les groupes classiques par leurs actions sur des structures combinatoires adaptées, les immeubles, qui sont des généralisations "branchées" des graphes de Cayley des groupes de Coxeter. Une trentaine d'années après que Tits les eut définis, M. Davis montra que les immeubles étaient en fait $CAT(0)$ ([24]), en utilisant le résultat de Moussong qui assure que les groupes de Coxeter sont $CAT(0)$ ([53]).

Les propriétés des groupes de Coxeter peuvent se démontrer en utilisant soit la structure $CAT(0)$, soit en utilisant la métrique des mots, dans les deux cas la géométrie utilisée est attachée à la structure polyédrale (ou combinatoire) du complexe de Davis. Plus généralement, on peut chercher à faire de la théorie géométrique des groupes dans un cadre purement combinatoire (ou polyédral) - autrement dit chercher comment obtenir des informations sur un groupe admettant une action géométrique sur une structure combinatoire (l'expression d'action géométrique est justifiée car dans tous les exemples considérés la structure combinatoire produit au moins une métrique géodésique invariante par les automorphismes de la structure). C'est l'aspect combinatoire de la théorie géométrique des groupes - notre domaine de recherche.

Nous avons divisé ce mémoire en quatre parties, que nous décrivons maintenant brièvement. Nous donnons à chaque fois nos résultats les plus pertinents dans le domaine.

Dans la première partie, nous traitons des *groupes de Coxeter* et de leurs *complexes de Davis*. C'est le domaine dans lequel nous avons commencé nos recherches, et la géométrie des groupes de Coxeter a inspiré la plupart de nos résultats de théorie combinatoire des groupes - y compris en l'absence de tout groupe de Coxeter. C'est pourquoi nous détaillons les définitions et résultats.

Nous obtenons notamment un résultat d'arithméticité :

Théorème (Théorème 5.4 dans le texte, voir aussi Théorème 5.3). *Le commensurateur d'un groupe de Coxeter à angles droits dans le groupe d'automorphismes du complexe de Davis est dense.*

En utilisant la géométrie combinatoire du complexe de Davis nous obtenons aussi la généralisation suivante d'un théorème de Scott (cf. [70]) :

Théorème (Théorème 6.2 dans le texte). *Tout sous-groupe quasi-convexe d'un groupe de Coxeter à angles droits est intersection de sous-groupes d'indices finis.*

En deuxième partie, nous décrivons nos résultats sur les *immeubles*, lesquels sont la plupart du temps hyperboliques, et donc pas du tout algébriques. Nous insistons sur le

cas où le groupe de Coxeter modèle est à angles droits, comme dans le cas abondamment étudiés de l'immeuble de Bourdon I_{pq} .

En utilisant la séparabilité des sous-groupes quasi-convexes nous montrons en particulier :

Théorème (Théorème 9.3 dans le texte). *Si $p \geq 6$, tous les réseaux uniformes de l'immeuble de Bourdon I_{pq} sont commensurables.*

En troisième partie, nous étudions les *espaces à murs*. Cette géométrie (discrète) est très riche en exemples. Elle contient de façon centrale la classe des *complexes cubiques* $CAT(0)$ - dont les complexes de Davis des groupes de Coxeter à angles droits - mais aussi les complexes de Davis des groupes de Coxeter quelconques, qui sont des exemples de *complexes zonotopaux* $CAT(0)$. En utilisant la géométrie des murs nous montrons ainsi :

Théorème (Théorème 10.8 dans le texte). *Soit X un complexe zonotopal $CAT(0)$ localement compact admettant un groupe d'isométries Γ discret, cocompact et Gromov-hyperbolique. Alors le groupe d'isométries G^+ engendré par les fixateurs de murs propres est non compact et presque simple : les sous-groupes distingués stricts sont contenus dans un sous-groupe compact.*

Plus généralement nous nous intéressons aux *groupes cubiques*, i.e. ceux qui admettent une action géométrique sur un complexe cubique $CAT(0)$. Nous montrons qu'un nombre étonnant de groupes cubiques hyperboliques "classiques" sont en fait (virtuellement) sous-groupes convexe-cocompacts d'un groupe de Coxeter à angles droits. À soi seul, cela justifierait une étude intensive des groupes de Coxeter à angles droits.

Voici deux résultats qui illustrent la richesse des groupes de Coxeter à angles droits :

Théorème (Théorème 11.13 dans le texte). *Tout groupe de Coxeter se plonge virtuellement dans un groupe de Coxeter à angles droit. Ses sous-groupes quasi-convexes sont donc séparables.*

Théorème (Théorème 11.14 dans le texte). *Soit M^n une variété hyperbolique réelle compacte arithmétique de type simple. Alors le groupe fondamental de M^n se plonge virtuellement dans un groupe de Coxeter à angles droit. Ses sous-groupes quasi-convexes sont donc séparables.*

Désormais une approche raisonnable du problème de la finitude résiduelle des groupes hyperboliques se dessine : trouver des groupes cubiques hyperboliques qui ne se plongent pas dans un groupe de Coxeter à angles droits.

La notion d'espace à murs est susceptible de généralisations continues (espaces à murs mesurés), liées aux questions classiques des analystes sur les espaces métriques plongeables dans L^1 . Le sujet connaît actuellement un regain d'intérêt de la part des informaticiens. Nous commençons l'étude géométrique des *espaces médians*, analogues continus des complexes cubiques $CAT(0)$.

La quatrième partie est dédiée à une géométrie combinatoire qui partage certaines propriétés avec les géométries cubiques, mais forme une classe distincte. Ici encore les

idées de géométrie combinatoire sont inspirées par les propriétés des complexes cubiques $CAT(0)$, ou encore des complexes de Davis.

Enfin dans la cinquième partie nous décrivons certains travaux en cours et projets de recherches.

Certains résultats mentionnés dans ce texte sont probablement du folklore de la théorie considérée, mais n'apparaissent nulle part. Nous en avons donc donné une brève justification.

Remerciements. Je remercie vivement Frédéric Paulin pour les mathématiques qu'il m'a fait faire et les encouragements constants qu'il m'a prodigués.

Liste des publications.

F. Haglund. Les polyèdres de Gromov. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I*, 313(9) : 603–606, 1991.

F. Haglund. Réseaux de Coxeter-Davis et commensurateurs. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 48(3) : 649–666, 1998.

F. Haglund et F. Paulin. Simplicité de groupes d’automorphismes d’espaces à courbure négative. In *The Epstein birthday schrift*, pages 181–248 (électronique). *Geom. Topol.*, Coventry, 1998.

F. Haglund. Existence, unicité et homogénéité de certains immeubles hyperboliques. *Math. Z.*, 242(1) : 97–148, 2002.

F. Haglund et F. Paulin. Constructions arborescentes d’immeubles. *Math. Ann.*, 325(1) : 137–164, 2003.

F. Haglund. Complexes simpliciaux hyperboliques de grande dimension. Prépublication, 2003.

F. Haglund. Commensurability and separability of quasiconvex subgroups. *Algebr. Geom. Topol. (électronique)*, 6 : 949–1024, 2006.

F. Haglund. Finite index subgroups of graph products. *Geom. Dedicata*, 2007. (accepté).

F. Haglund et J. Świątkowski. Separating quasi-convex subgroups in 7-systolic groups. Soumis à *Groups Geom. Dyn.*, 2006.

P.E. Caprace et F. Haglund. On geometric flats in the CAT(0) realization of Coxeter groups and Tits buildings. *Canad. J. Math.*. À paraître, 2007.

F. Haglund et D. T. Wise. Special cube complexes. *GAFSA, Geom. Funct. Anal.*, 2007. À paraître.

I. Chatterji, C. Druţu et F. Haglund. Median spaces and spaces with measured walls. Prépublication, disponible à <http://fr.arXiv.org/abs/0704.3749>, 2007.

F. Haglund. Isometries of CAT(0) cube complexes are semi-simple. Prépublication, disponible à <http://fr.arxiv.org/abs/0705.3386>, 2007.

F. Haglund et D. T. Wise. Coxeter groups are special. Soumis, 2007.

F. Haglund. Finite extensions of cubic groups. En préparation, 2007.

Partie 1. Groupes de Coxeter et Géométrie du Complexe de Davis.

2. RAPPELS SUR LES GROUPES DE COXETER ET LEURS COMPLEXES DE DAVIS.

Pour les généralités sur les systèmes de Coxeter nous renvoyons à [8].

Définition 2.1. [groupes de Coxeter] Un *système de Coxeter* est un couple (W, S) où W est un groupe, S est une partie génératrice de W dont tous les éléments sont d'ordre deux, et telle que toute relation dans (W, S) se déduise des relations suivantes de type tresse : pour $s, t \in S$ avec st d'ordre $m(= m_{st})$ (fini), les deux mots $sts\dots$ et $tst\dots$ de longueurs m sont égaux dans W .

Les systèmes de Coxeter pour lesquels les seules relations de tresses sont du type $st = ts$ sont dits à *angles droits*.

Une *réflexion* d'un système de Coxeter (W, S) est la conjuguée dans W d'un élément $s \in S$.

Définition 2.2. [complexes de Davis]

Soit (W, S) un système de Coxeter. Soit X un complexe simplicial. Pour chaque générateur $s \in S$, soit X_s un sous-complexe de X . On considère l'espace topologique $\mathfrak{A}(W, X)$ quotient de $W \times X$ par la relation d'équivalence engendrée par les relations \sim_s suivantes : $(w, x) \sim_s (w', x') \iff x = x' \in S$ et $w' = ws$: c'est le complexe de Davis associé à (W, S) , $(X, (X_s)_{s \in S})$ (voir [23]). Nous rappelons maintenant quelques propriétés générales de $\mathfrak{A}(W, X)$, nous renvoyons le lecteur à [23] pour les démonstrations.

L'action à gauche de W sur $W \times X$ induit une action de W sur $\mathfrak{A}(W, X)$. L'application envoyant $x \in X$ sur la classe de $(1, x)$ est un homéomorphisme sur son image, encore notée X . Et X est un domaine fondamental strict pour l'action de W . De plus $\mathfrak{A}(W, X)$ admet une rétraction W -équivariante sur X . L'espace $\mathfrak{A}(W, X)$ est localement compact et l'action de W sur $\mathfrak{A}(W, X)$ est propre si et seulement si X est localement compact et, pour tout $x \in X$, le sous-groupe de W engendré par les s tels que $x \in X_s$ est fini.

L'espace $\mathfrak{A}(W, X)$ admet une structure naturelle de complexe multi-simplicial (pour laquelle la rétraction $\mathfrak{A}(W, X) \rightarrow X$ est simpliciale), qui est en fait simpliciale lorsque les sous-complexes X_s sont pleins dans X .

Le *complexe de Davis* $\mathfrak{A}(W, S)$ d'un groupe de Coxeter (W, S) s'obtient par la construction ci-dessus, en prenant pour $(X, (X_s)_{s \in S})$ un espace à faces naturellement associé à (W, S) . Précisément on appelle *nerf fini* de (W, S) le complexe simplicial N sur S , avec un simplexe d'ensemble de sommets T pour chaque partie $T \subset S$ telle que le sous-groupe engendré par T soit fini. On prend alors pour X le cône sur la première subdivision barycentrique de N . Et pour chaque $s \in S$, on définit la face X_s comme l'étoile de $\{s\}$ dans N' .

Remarque 2.3. Les espaces $\mathfrak{A}(W, X)$ ont joué un rôle important en topologie : en utilisant ces espaces, Davis a pu construire dans [23] les premières variétés compactes asphériques (de dimension $n \geq 4$) non revêtues par \mathbb{R}^n .

En regroupant convenablement les simplexes du complexe de Davis, on obtient des polyèdres : le complexe de Davis est la première subdivision barycentrique d'un complexe polyédral.

Définition 2.4. [zonotopes de Coxeter, complexes zonotopaux] Un polytope P de \mathbb{R}^n est un *zonotope (de Coxeter)* si pour toute arête a de P , la réflexion σ_a conserve P (en notant σ_a la symétrie orthogonale par rapport à H_a , l'hyperplan médiateur de a), et ne fixe aucun sommet de P . Si x est un sommet fixé de P , le théorème de Poincaré-Vinberg-Tits assure que le groupe d'isométrie engendré par $S_x = \{\sigma_a, a \text{ arête de } P \text{ contenant } x\}$ est un groupe de Coxeter W qui agit librement sur l'orbite (finie) Wx . On en déduit que Wx est l'ensemble des sommets de P et que toute arête de P est dans l'orbite modulo W d'une unique arête contenant x . Finalement W s'identifie au groupe d'isométries de P engendré par tous les σ_a (il est donc indépendant de x). Nous dirons que W est le *groupe* du zonotope P et (W, S_x) est le *système* du zonotope P .

Nous dirons que le zonotope P est *normalisé* si toutes ses arêtes sont de longueur 1.

Un complexe polyédral est dit *zonotopal* si toutes ses faces sont des zonotopes.

Si (W, S) est un système de Coxeter fini, soit n le cardinal de S , alors il existe une action par isométrie de W sur \mathbb{R}^n fixant l'origine telle que tout élément s de S agisse comme une réflexion par rapport à un hyperplan H_s . De plus il existe un unique point x de \mathbb{R}^n à distance $\frac{1}{2}$ de chacun des hyperplans H_s . Alors l'enveloppe convexe P de l'orbite de x sous W est un zonotope de Coxeter normalisé, de groupe W . Dans ce cas, $\mathfrak{A}(W, S)$ s'identifie à la première subdivision barycentrique de P (le sommet du cône sur N est envoyé sur 0, et le barycentre du simplexe sur S est envoyé sur x).

Donc deux zonotopes de systèmes isomorphes ont des premières subdivisions barycentriques isomorphes et il existe (à isométrie près) un unique zonotope de Coxeter normalisé de système donné (le P ci-dessus).

Si (W, S) est un système de Coxeter général, le complexe simplicial $\mathfrak{A}(W, S)$ est la première subdivision barycentrique d'un complexe zonotopal $\mathfrak{Z}(W, S)$. En effet pour chaque $T \subset S$ tel que W_T soit fini, il y a un plongement naturel de $\mathfrak{A}(W_T, T)$ dans $\mathfrak{A}(W, S)$, d'où la première subdivision barycentrique d'une face zonotopale passant par l'origine, puis toutes ses translatées par W . Ces faces définissent la structure polyédrale sur $\mathfrak{Z}(W, S)$.

Comme $\mathfrak{Z}(W, S)$ et $\mathfrak{A}(W, S)$ se déduisent simplement l'un de l'autre, nous les appelons tous deux complexe de Davis.

Notons que W agit simplement transitivement sur les sommets de $\mathfrak{Z}(W, S)$. Dans la suite, nous identifierons W avec l'ensemble des sommets de $\mathfrak{Z}(W, S)$. Deux sommets w_1, w_2 de $\mathfrak{Z}(W, S)$ sont adjacents si et seulement s'il existe $s \in S$ tel que $w_2 = w_1.s$.

Le résultat fondamental suivant de Moussong donne une explication géométrique de nombreuses propriétés algébriques classiques des groupes de Coxeter.

Théorème 2.5. (cf. [53]) *Il existe une métrique CAT(0) sur $\mathfrak{Z}(W, S)$ rendant chaque face isométrique à un zonotope normalisé, invariante sous l'action de W . Ainsi les groupes de Coxeter sont CAT(0) (agissent géométriquement sur un espace CAT(0)).*

Lorsque (W, S) est un système de Coxeter à angles droits, les zonotopes de $\mathfrak{Z}(W, S)$ sont tous des cubes unités : $\mathfrak{Z}(W, S)$ est un complexe cubique $CAT(0)$.

De plus si W ne contient pas de sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ alors W est Gromov-hyperbolique et il existe sur $\mathfrak{Z}(W, S)$ une distance $CAT(-1)$ invariante sous W .

Plus tard Davis a généralisé ce résultat aux immeubles ([24]).

3. UNE CARACTÉRISATION LOCALE DU COMPLEXE DE DAVIS.

Le complexe de Davis est une union de zonotopes. Mais comment ces zonotopes se recollent-ils ?

Définition 3.1. [voisinage pondéré d'un sommet dans un complexe zonotopal]

Soit P un zonotope de Coxeter et x un sommet de P . Deux arêtes a, b distinctes issues de x sont contenues dans une unique face polygonale de P dont le nombre de côté est pair, noté $2m_{ab}$ (m_{ab} est l'ordre du produit de réflexions $\sigma_a \sigma_b$ dans les notations de la Définition 2.4). Le *voisinage de x dans P* est l'enveloppe convexe $N(x, P)$ de l'ensemble des centres \hat{F} des faces F de P contenant x (donc $N(x, P)$ est un sous-complexe de la première subdivision barycentrique P'). On obtient le *voisinage pondéré de x dans P* en munissant $N(x, P)$ de la fonction $(\hat{a}, \hat{b}) \mapsto m_{ab}$ (pour a, b arêtes issues de x). Par convention, on a posé $m_{aa} = 1$.

Soit X un complexe zonotopal et x un sommet de X . Le *voisinage pondéré de x dans X* est le sous-complexe simplicial $N(x, X)$ de la première subdivision barycentrique X' obtenu en recollant les complexes $N(x, P)$ (pour P une face de X contenant x), muni du poids $(\hat{a}, \hat{b}) \mapsto m_{ab}$ (pour a, b arêtes issues de x) en convenant que $m_{ab} = \infty$ si a, b ne sont pas contenues dans une même face de X .

Par construction même du complexe de Davis, le voisinage pondéré de 1 dans $\mathfrak{Z}(W, S)$ est le cône sur la première subdivision barycentrique du nerf fini de (W, S) , muni de son poids $(s, t) \mapsto m_{st}$.

Définition 3.2. [systèmes de réflexions locales, cf. [36], [38], [40]] Soit X un complexe zonotopal. Un *système de réflexions locales sur X* est la donnée pour toute arête orientée \vec{a} de X partant de x , aboutissant à x' , d'un isomorphisme $\sigma_{\vec{a}} : N(x, X) \rightarrow N(x', X)$ qui préserve les poids et fixe chaque point de $N(x, X) \cap N(x', X)$. On demande que l'isomorphisme associé à l'arête inverse \overleftarrow{a} soit \vec{a}^{-1} .

Si f est un automorphisme de X , on obtient un nouveau système de réflexions locales par la formule $f(\sigma)_{\vec{a}} = f \circ \sigma_{f^{-1}(\vec{a})} \circ f^{-1}$. Ceci définit une action de $\text{Aut}(X)$ sur l'ensemble de tous les systèmes de réflexions locales.

Exemple 3.3. Soit (W, S) un système de Coxeter. Soit a une arête de $\mathfrak{Z}(W, S)$ entre w et ws . Alors la réflexion $t = wsw^{-1}$ échange les extrémités de l'arête a et préserve toute face contenant a . Donc t définit par restriction des isomorphismes $N(w, X) \rightarrow N(ws, X)$, $N(ws, X) \rightarrow N(w, X)$, et ceci définit un système de réflexion locale sur $\mathfrak{Z}(W, S)$. Nous noterons σ^W ce système de réflexions locales.

Pour $g \in W$ l'unique réflexion de (W, S) échangeant les extrémités de ga est gtg^{-1} ; donc g préserve σ^W .

Définition 3.4. [holonomie d'un systèmes de réflexions locales, cf. [36], [38], [40]] Soit σ un système de réflexions locales sur un complexe zonotopal X . Pour tout couple (\vec{a}, π) , où \vec{a} est une arête orientée, π une face polygonale et $a \subset \pi$, soit $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ la suite d'arêtes orientées décrivant une fois $\partial\pi$ en commençant par \vec{a} (i.e. $\vec{a} = \vec{a}_1$, chaque a_i est dans π , l'origine de \vec{a}_{i+1} est l'extrémité de \vec{a}_i , π possède n côtés). Nous posons $h_\sigma(\vec{a}, \pi) = \sigma_{\vec{a}_n} \circ \dots \circ \sigma_{\vec{a}_1}$; c'est un automorphisme de $N(x, P)$, où x est l'origine de \vec{a} . La fonction h_σ est l'holonomie de σ .

Exemple 3.5. Soit (W, S) un système de Coxeter et soit σ^W le système de réflexions locales naturellement associé sur $\mathfrak{Z}(W, S)$. En considérant les relations dans (W, S) on constate que $h_{\sigma^W} = 1$.

Le résultat suivant est explicitement démontré dans le cas particulier où les poids sont tous égaux et ≥ 3 (voir [36]). La preuve du cas général est identique.

Lemme 3.6. Soient X, Y deux complexes zonotopaux simplement connexes, et soient σ, τ deux systèmes de réflexions locales sur X, Y tels que $h_\sigma = 1, h_\tau = 1$. Alors tout isomorphisme pondéré $N(x, X) \rightarrow N(y, Y)$ s'étend en un unique isomorphisme $X \rightarrow Y$ envoyant σ sur τ .

□

On en déduit la caractérisation locale suivante des complexes de Davis (la preuve dans divers cas particuliers se trouve dans [36], [38], [40], elle se généralise sans difficultés).

Théorème 3.7. Soit X un complexe zonotopal simplement connexe et soit σ un système de réflexions locales tel que $h_\sigma = 1$. Les réflexions locales de σ aux arêtes contenant un sommet fixé x s'étendent en des involutions de X : soit W le groupe engendré par cet ensemble S_x d'involutions.

Alors (W, S_x) est un système de Coxeter, et (X, σ) est isomorphe à $(\mathfrak{Z}(W, S_x), \sigma^W)$: X est un complexe de Davis. Le groupe d'automorphismes de (X, σ) est le produit semi-direct de W avec un groupe fini fixant x , isomorphe au groupe d'automorphismes du voisinage pondéré $N(x, X)$, i.e. au groupe des automorphismes du système (W, S_x) . Enfin tout autre système de réflexions locales sans holonomie sur X est conjugué à σ par un unique automorphisme de X .

□

4. GÉOMÉTRIES DU COMPLEXE DE DAVIS.

Dans ce qui suit, (W, S) désigne un système de Coxeter. Nous avons déjà vu que le complexe de Davis de (W, S) admet une métrique $CAT(0)$ invariante sous W (cf. Théorème 2.5).

Nous voulons ici insister sur une géométrie plus combinatoire, parfois encore mieux adaptée dans ce contexte.

On désigne par $|w|$ la longueur de $w \in W$ dans la métrique des mots associée à la partie génératrice S . Compte tenu de l'identification d'une part entre W et l'ensemble des sommets de $\mathfrak{Z}(W, S)$, et d'autre part entre l'ensemble des couples (w, ws) et l'ensemble des arêtes orientées de $\mathfrak{Z}(W, S)$, la quantité $|w_1^{-1}w_2|$ représente la distance combinatoire dans le 1-squelette de $\mathfrak{Z}(W, S)$ entre w_1 et w_2 .

4.1. Moitiés, murs, hyperplans. Pour $s \in S$, on pose $A_s^+ = \{w \in W, |sw| > |w|\}$ et $A_s^- = \{w \in W, |sw| < |w|\}$. Alors $M_s = \{A_s^+, A_s^-\}$ est une partition de W (voir [8]).

Définition 4.1. [moitiés et murs] Les translatés wA_s^ε sont appelés les *moitiés de* (W, S) , les translatés $wM_s = \{wA_s^+, wA_s^-\}$ sont appelés les *murs de* (W, S) . Nous dirons qu'un mur sépare deux points w_1, w_2 si l'un des éléments de la partition contient w_1 , et l'autre contient w_2 . La *distance de mur sur* W est définie comme le nombre $d_{\text{mur}}(w_1, w_2)$ de murs de (W, S) qui séparent w_1 et w_2 . Nous dirons qu'une arête orientée \vec{a} de $\mathfrak{Z}(W, S)$ traverse un mur M si M sépare les extrémités de a . Notons que l'unique réflexion de (W, S) qui échange les extrémités de a échange aussi les moitiés définissant l'unique mur M traversé par \vec{a} .

Lemme 4.2. [cf. [8]] *La distance combinatoire coïncide avec la distance de murs. Un chemin du 1-squelette est géodésique si et seulement si la suite des murs que ses arêtes traversent est sans répétition.*

Définition 4.3. [hyperplans et demi-espaces] (cf. [44], en particulier le Lemme 4.4) Pour toute réflexion t de (W, S) , l'*hyperplan de réflexion de* t est l'ensemble $H_t \subset \mathfrak{Z}(W, S)$ des points fixes de t . Notons que H_t est un sous-complexe $CAT(0)$ -convexe de $\mathfrak{A}(W, S)$, et que H_t coïncide avec l'ensemble des points équidistants des extrémités d'une arête a préservée par t . De plus H_t sépare $\mathfrak{Z}(W, S)$ en deux ouverts $CAT(0)$ -convexes, les *demi-espaces ouverts définis par* H_t , la trace de chaque demi-espace ouvert sur W étant l'une des moitiés de W délimitée par le mur t -invariant. L'adhérence d'un demi-espace ouvert est un *demi-espace fermé*. C'est un sous-complexe $CAT(0)$ -convexe de $\mathfrak{A}(W, S)$, dont le bord est un hyperplan de réflexion.

Il est remarquable qu'on ne perd pas d'information en passant du complexe de Davis muni de sa métrique $CAT(0)$ à son 0-squelette muni de la distance de mur :

Théorème 4.4. (cf. [44], Corollaire 5.8) $\text{Isom}(W, d_{\text{mur}}) = \text{Aut}(\mathfrak{Z}(W, S))$.

4.2. Convexité. Une propriété remarquable du complexe de Davis, c'est qu'il contient beaucoup de convexes. D'une part nous disposons de parties $CAT(0)$ -convexes - comme les demi-espaces fermés, et leurs intersections. D'autre part nous pouvons considérer les parties $Y \subset W = \mathfrak{Z}(W, S)^0 \subset \mathfrak{Z}(W, S)^1$ de l'ensemble des sommets qui sont combinatoirement convexes au sens suivant :

Définition 4.5. [convexité combinatoire] Un ensemble Y de sommets d'un graphe est dit *combinatoirement convexe* si toute géodésique combinatoire du graphe joignant deux sommets de Y a tous ses sommets dans Y .

L'enveloppe convexe combinatoire d'un ensemble de sommets Y est l'intersection des parties combinatoirement convexes contenant Y .

Dans un graphe quelconque, il n'y a pas en général de parties combinatoirement convexes non triviales. La géométrie combinatoire du (1-squelette du) complexe de Davis est au contraire remarquable par l'abondance de convexes combinatoires non triviaux. Ainsi du lemme 4.2 on déduit :

Corollaire 4.6. *Toute moitié est combinatoirement convexe.*

Dans le complexe de Davis, nous avons déjà considéré le voisinage régulier $N_x = N(x, \mathfrak{Z}(W, S))$ d'un sommet x de $\mathfrak{Z}(W, S)$, qui est un sous-complexe de $\mathfrak{A}(W, S)$. Plus généralement :

Définition 4.7. [sous-complexes de blocs] Soit $Y \subset W$ un ensemble de sommets.

Le *voisinage régulier de Y* est l'union N_Y des voisinages réguliers N_x , pour $x \in Y$. Un tel complexe sera aussi appelé *sous-complexe de blocs de $\mathfrak{A}(W, S)$* (chaque N_x étant un *bloc*). Notons que $N_Y \cap W = Y$. Nous dirons que Y est *l'ensemble des sommets de N_Y* .

L'union des blocs rencontrant un sous-complexe de blocs N_Y est un sous-complexe de blocs dont nous noterons Y^{+1} l'ensemble des sommets. Clairement Y^{+1} est la réunion de l'ensemble des sommets de tous les zonotopes P tels que $P \cap Y \neq \emptyset$, c'est donc l'ensemble des sommets d'un sous-complexe de $\mathfrak{Z}(W, S)$.

Pour k un entier ≥ 0 , nous définissons $Y^{+k} \subset W$ inductivement par $Y^{+0} = Y$ et si $k > 0$ alors $Y^{+k} = (Y^{+(k-1)})^{+1}$.

La *boule duale de centre $x \in W$ et de rayon $k \in \mathbb{N}$* est l'ensemble $\{x\}^{+k}$. Nous noterons $B^*(x, k)$ le complexe de blocs $N_{\{x\}^{+k}}$ correspondant. Les boules duales $\{x\}^{+k}$ sont bien des boules de W , mais pour la distance combinatoire provenant d'une autre structure de graphe sur W : deux sommets x, y de W sont liés dans ce graphe (noté $\text{Cayley}^*(W, S)$) si et seulement si les blocs N_x et N_y ont une intersection non vide. Nous noterons d^* la distance combinatoire sur W associée au graphe $\text{Cayley}^*(W, S)$. Clairement on a $d^* \leq d \leq Md^*$, où M désigne le diamètre combinatoire maximum de l'ensemble des sommets d'un zonotope de $\mathfrak{Z}(W, S)$.

Voici une caractérisation des sous-complexes de blocs $CAT(0)$ -convexes (la preuve du cas général est standard et laissée au lecteur, des cas particuliers 2-dimensionnels se trouvent dans [37], le cas cubique à angles droits étant traité dans [41]) :

Lemme 4.8. *Soit N_Y un sous-complexe de blocs de $\mathfrak{A}(W, S)$. Sont équivalentes :*

- (1) N_Y est $CAT(0)$ convexe,
- (2) N_Y est une intersection de demi-espaces fermés du complexe de Davis,

- (3) N_Y est connexe et est localement une intersection de demi-espaces fermés (autrement dit la trace de N_Y sur toute face zonotopale P de $\mathfrak{Z}(W, S)$ est un sous-complexe $CAT(0)$ -convexe de P'),
- (4) Y est combinatoirement convexe.

Corollaire 4.9. *L'enveloppe convexe d'une partie $Y \subset W$ est l'intersection des moitiés de W contenant Y . En particulier l'enveloppe convexe d'une partie finie est finie.*

Notons qu'en général l'enveloppe convexe (combinatoire) de deux points distincts d'un graphe n'a aucune raison d'être finie : par exemple dans le graphe quotient du pavage carré du plan euclidien par une translation de vecteur deux fois la diagonale, l'enveloppe convexe de deux points à distance 2 est le graphe entier !

Nous allons maintenant introduire diverses notions renforcées de convexité qui apparaissent naturellement dans le complexe de Davis, et mériteraient une étude dans un cadre combinatoire général.

D'abord la caractérisation des parties combinatoirement convexes par leur trace sur les faces motive la définition suivante.

Définition 4.10. Nous dirons qu'un sous-complexe C du complexe de Davis $\mathfrak{Z}(W, S)$ est *fortement convexe* si C est connexe et pour tout zonotope P on a $P \cap C = \emptyset$ ou $P \cap C$ est une face de P . De même une partie Y de W est dite *fortement convexe* si son voisinage régulier N_Y est connexe, et pour tout zonotope P de $\mathfrak{Z}(W, S)$, ou bien $P \cap Y = \emptyset$, ou bien il existe une face Q de P telle que $P \cap Y$ soit l'ensemble des sommets de Q .

Par exemple, si un sous-complexe $Y \subset \mathfrak{Z}(W, S)$ est $CAT(0)$ -convexe, alors la trace de Y sur toute face zonotopale P est un sous-complexe $CAT(0)$ -convexe de P , donc une face de P . Ainsi *tout sous-complexe $CAT(0)$ -convexe est fortement convexe.*

En vertu du Lemme 4.8, nous obtenons :

Corollaire 4.11. *Toute partie fortement convexe est combinatoirement convexe. En particulier l'ensemble des sommets de tout sous-complexe $CAT(0)$ -convexe est combinatoirement convexe.*

Définition 4.12. Soit Y un ensemble de sommets d'un graphe. Disons que Y est L_1 -convexe si, pour tout sommet x , il existe un sommet p dans Y tel que pour tout $q \in Y$ on a $d_{\text{comb}}(x, q) = d_{\text{comb}}(x, p) + d_{\text{comb}}(p, q)$.

(C'est dire que Y est *gated* au sens de [29].) Il est immédiat de vérifier que tout ensemble L_1 -convexe Y est convexe et que le point p associé à x est unique et réalise la distance de x à Y . Pour cette raison, p est appelé la *projection combinatoire de x sur Y* . Un segment de trois sommets consécutifs dans un circuit de longueur six est une partie convexe, mais non L_1 -convexe.

Pour $T \subset S$, le sous-groupe $W_T < W$ engendré par T est un groupe de Coxeter (pour la partie génératrice T), et toute classe à droite wW_T contient un unique élément de plus petite norme g , tel que $w = gv$ avec $|w| = |g| + |v|$ (cf. [8]). Traduit en terme géométrique :

Lemme 4.13. *Pour toute partie $T \subset S$ et tout $w \in W$, la partie $wW_T \subset W$ est L_1 -convexe (donc convexe). En prenant T sphérique, on en déduit que pour toute face zonotopale P , l'ensemble P^0 des sommets de P est une partie L_1 -convexe de W . Dans la suite, nous noterons $\pi_P : W \rightarrow P^0$ la projection combinatoire.*

Ainsi l'ensemble des sommets d'une face zonotopale du complexe de Davis est simultanément fortement convexe et L_1 -convexe. Nous verrons plus loin que la classe des complexes cubiques $\text{CAT}(0)$ est particulièrement riche en parties L_1 -convexes (voir Section 10.3).

Dans [56], Niblo et Reeves démontrent la propriété suivante : Il existe une constante s telle que si p est un élément de W et si h est une moitié de W vérifiant $d(p, h) \geq s$ alors il existe un mur m' séparant p du demi-espace fermé correspondant à h . Nous en déduisons :

Proposition 4.14. *Il existe une constante $\sigma (= \sigma(W, S)) \in \mathbb{N}$ telle que, pour toute partie convexe $C \subset W$, on a $\text{Conv}(C^{+1}) \subset C^{+(1+\sigma)}$.*

Nous allons maintenant montrer que pour certains types de systèmes de Coxeter on a $\sigma = 0$, autrement dit pour toute partie combinatoirement convexe $Y \subset W$, le voisinage dual Y^{+1} est combinatoirement convexe.

Définition 4.15. Un complexe simplicial N est dit *de drapeau* si tout sous-graphe complet du 1-squelette N^1 est le 1-squelette d'un simplexe de N .

Soit (W, S) un système de Coxeter de nerf fini $N (= N(W, S))$. On dit que (W, S) est *de type (FC)* lorsque N est un complexe de drapeau ("Flag Complex" en anglais, d'où la terminologie). Autrement dit une partie $T \subset S$ est sphérique si et seulement si pour t, t' dans T on a $m_{tt'} < \infty$.

Proposition 4.16. *Supposons (W, S) de type (FC). Si Y est une partie combinatoirement convexe, alors Y^{+1} est fortement convexe (donc à nouveau combinatoirement convexe).*

En fait nous avons obtenu ce résultat dans deux cas particuliers (lorsque le nerf fini est un graphe de maille ≥ 4 et chaque m_{ij} est ≥ 3 , [37], ou lorsque (W, S) est à angles droits, [41]) mais il reste valable sous la condition plus générale que le nerf fini $N(W, S)$ est de drapeau. Esquissons l'argument, puisque le résultat semble nouveau.

Démonstration. Soit R une face zonotopale du complexe de Davis qui rencontre Y^{+1} . Nous voulons montrer que $R \cap Y^{+1}$ est l'ensemble des sommets d'une face de R . Si R rencontre Y alors $R \subset Y^{+1}$ et il n'y a rien à démontrer. Supposons donc $R \cap Y = \emptyset$. Pour deux sommets g, h de W , toutes les géodésiques de g à h dans le graphe de Cayley de (W, S) utilisent les mêmes générateurs de S : nous noterons $S(g, h)$ l'ensemble des générateurs utilisés par ces géodésiques. De même pour toute face zonotopale P nous noterons $S(P)$ la réunion de $S(g, h)$ pour g, h des sommets de P .

Notons \mathcal{E} l'ensemble des $(y, q) \in Y \times R^0$ tels qu'il existe une face zonotopale Q contenant y et q , et considérons sur \mathcal{E} (non vide par hypothèse) la fonction $(y, q) \mapsto d_{\text{comb}}(y, q)$.

Soit d la borne inférieure de d_{comb} sur \mathcal{E} (on a supposé que $d > 0$). Notons \mathcal{E}_0 l'ensemble des $(x, p) \in \mathcal{E}$ tels que $d_{\text{comb}}(x, p) = d$. Pour $(y, q) \in \mathcal{E}$ nous noterons $P(y, q)$ la face zonotopale engendrée par $\{y, q\}$.

La minimalité entraîne que pour $(x, p) \in \mathcal{E}_0$ on doit avoir $p = \pi_R(x)$. Et pour tout autre $(x', p') \in \mathcal{E}_0$ on doit avoir $x' = \pi_{P(x', p')}(x)$. Or pour deux L_1 -convexes quelconques P_1, P_2 d'intersection non vide, on a toujours $\pi_{P_2} \circ \pi_{P_1} = \pi_{P_1 \cap P_2}$, donc ici $p' = \pi_R(x') = \pi_{P(x', p')}(p) = \pi_{R \cap P(x', p')}(x)$.

On montre alors (par récurrence sur $d_{\text{comb}}(x, x')$) que pour deux couples $(x, p), (x', p') \in \mathcal{E}_0$ on a une situation produit : $S(x', p') = S(x, p)$, $S(p, p') = S(x, x') \subset S(R)$ et d'ailleurs tout $u \in S(x, p)$ commute avec tout $v \in S(p, p')$.

Fixons donc à partir de maintenant un couple (x, p) dans \mathcal{E}_0 . Notons que $S_1 = S(x, p)$ est sphérique puisque contenu dans $S(P(x, p))$.

La convexité de Y assure que pour $(y, q) \in \mathcal{E}$, si on pose $x' = \pi_{P(y, q)}(x)$ puis $p' = \pi_R(x')$, on a $(x', p') \in \mathcal{E}_0$ et $p' = \pi_{R \cap P(y, q)}(x)$. On obtient donc $S(x, q) = S(x, p') \cup S(p', q) = S(x, p) \cup S(p, p') \cup S(p', q)$. On introduit alors deux autres parties (sphériques) de S :

$$S_2 = \cup_{(x', p') \in \mathcal{E}_0} S(p, p') \subset S(R), \quad S_3 = \cup_{(y, q) \in \mathcal{E}, p' = \pi_{R \cap P(y, q)}(x)} S(p', q) \subset S(R)$$

Clairement $S_2 \cup S_3$ est sphérique. D'autre part la relation de commutation $S_1 \perp S_2$ entre deux parties sphériques assure que $S_1 \cup S_2$ est sphérique.

Nous affirmons que $T = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ est une partie sphérique. Ceci découle du fait que, comme (W, S) est de type (FC) , il suffit de vérifier que pour $u \in S_1, v \in S_3$ on a $m_{uv} < \infty$. Or cela est immédiat puisque pour $v \in S_3$ on a $v \in S(p', q)$ (avec les notations ci-dessus, pour un certain $(y, q) \in \mathcal{E}$), donc $v \in S(q, y)$ (sphérique). Mais on a vu que $S(x, p) = S(x', p')$, donc on a aussi $u \in S(q, y)$, d'où $m_{uv} < \infty$.

Alors la face zonotopale \bar{P} passant par x et telle que $S(\bar{P}) = T$ vérifie $\bar{P} \cap R = Y^{+1} \cap R$. \square

En itérant la proposition précédente nous voyons que, sous l'hypothèse (FC) , une boule combinatoire duale est l'ensemble des sommets d'un sous-complexe fortement convexe. Ceci signifie que pour passer d'une boule combinatoire duale à la boule combinatoire duale de rayon un de plus, on effectue des recollements de faces zonotopales les plus simples et les plus libres possibles. C'est cette description précise des extensions de boules combinatoires duales qui permet de définir un certain nombre d'objets sur le complexe de Davis - par exemple des automorphismes - en effectuant la construction sur chaque boule combinatoire duale, par récurrence sur le rayon (voir [37]).

Remarque 4.17. La démonstration ci-dessus donne encore des renseignements lorsque (W, S) n'est plus nécessairement de type (FC) . En effet, en considérant la face zonotopale P' passant par x et telle que $S(P') = S_1 \cup S_2$, on voit que P' connecte Y à R , et de plus $R \cap Y^{+1}$ est contenu dans l'union des faces de R qui rencontrent simultanément la face $R \cap P'$ et l'ensemble $Y \cap P'$ (une face de P' si Y est fortement convexe). En utilisant le Lemme 4.8, ceci permet parfois de montrer que Y^{+1} est combinatoirement convexe,

même s'il n'est pas fortement convexe. Ainsi on obtient par exemple : *si pour tout s, t dans S on a $m_{st} \geq 4$ alors le voisinage dual de toute partie combinatoirement convexe est convexe.*

5. LE GROUPE D'AUTOMORPHISMES DU COMPLEXE DE DAVIS.

Pour tout système de Coxeter (W, S) (avec S fini) munissons $\text{Aut}(\mathfrak{Z}(W, S))$ de la topologie compacte-ouverte : deux automorphismes sont proches s'ils sont égaux sur un nombre fini, mais grand, de sommets. Ainsi $\text{Aut}(\mathfrak{Z}(W, S))$ est un groupe localement compact totalement discontinu. Et $W < \text{Aut}(\mathfrak{Z}(W, S))$ est un réseau uniforme.

Proposition 5.1. *(cf. [44], Théorème 5.12) Le groupe d'automorphismes d'un complexe de Davis $\mathfrak{Z}(W, S)$ est discret si et seulement si le nerf fini $N = N(W, S)$ est rigide, i.e. lorsque tout automorphisme (pondéré) fixant l'étoile d'un sommet de N est trivial.*

Lorsque le fixateur de l'étoile d'un sommet s de N est non trivial alors le fixateur du demi-espace de $\mathfrak{Z}(W, S)$ ne contenant pas 1 mais contenant s est non trivial également.

5.1. Groupes simples d'automorphismes du complexe de Davis. Soit (W, S) un système de Coxeter (avec S fini). La proposition 5.1 ci-dessus amène à considérer le sous-groupe $\text{Aut}^+(\mathfrak{Z}(W, S))$ engendré par les fixateurs de demi-espaces. Par exemple si (W, S) est un groupe de Coxeter "libre" (tous les m_{st} sont infinis pour $s \neq t$) avec $|S| \geq 3$ alors $\mathfrak{Z}(W, S)$ est un arbre régulier non élémentaire, $\text{Aut}^+(\mathfrak{Z}(W, S))$ est le sous-groupe d'indice 2 formé des automorphismes qui envoient un sommet à distance paire, et Tits a montré que $\text{Aut}^+(\mathfrak{Z}(W, S))$ est simple.

Nous montrons la généralisation suivante :

Théorème 5.2. *(cf. [44], Théorème 1.3) Soit (W, S) un système de Coxeter irréductible tel que W soit Gromov-hyperbolique non élémentaire et $N(W, S)$ soit non rigide. Alors $\text{Aut}^+(\mathfrak{Z}(W, S))$ est un sous-groupe simple non trivial de $\text{Aut}(\mathfrak{Z}(W, S))$.*

Sans détailler la preuve, mentionnons une condition supplémentaire sous laquelle le groupe $\text{Aut}^+(\mathfrak{Z}(W, S))$ agit cocompactement sur $\mathfrak{Z}(W, S)$. Il suffit que le groupe $G(W, S)$ des automorphismes pondérés de $N(W, S)$ satisfasse la condition de forte transitivité suivante : étant donné deux simplexes σ, τ de $N(W, S)$, il existe $g \in G(W, S)$ tel que $g(\tau)$ soit joignable à σ dans le complexe $N(W, S)$. C'est par exemple le cas lorsque $G(W, S)$ admet un simplexe comme domaine fondamental strict. Notons que cette condition est remplie dans le cas d'un système de Coxeter libre non élémentaire.

5.2. Densité du commensurateur de W .

Dans [37], nous avons remarqué que pour certains systèmes de Coxeter de dimension 2, les boules duales (cf. Définition 4.1) sont des domaines fondamentaux stricts pour des sous-systèmes de Coxeter (d'indices finis). Cela entraîne une propriété d'arithmécité à la Margulis du réseau uniforme $W < \text{Aut}(\mathfrak{Z}(W, S))$.

Théorème 5.3. *[cf. [37]] Soit (W, S) un système de Coxeter dont le nerf fini $N = N(W, S)$ est un graphe dont toutes les arêtes sont pondérées par le même entier $k \geq 2$.*

Ainsi $\mathfrak{Z}(W, S)$ est un complexe polygonal $CAT(0)$ dont tous les polygones ont $2k$ côtés et dont tous les sommets ont un link isomorphe à N .

Si N n'a pas de circuit de longueur 3 et si k est pair, alors le commensurateur de W dans $\text{Aut}(\mathfrak{Z}(W, S))$ est dense. Le même résultat est vrai sans restriction sur la maille de N si k est divisible par 6.

En fait, la preuve montre un peu plus. Définissons le *normalisateur virtuel* d'un sous-groupe $\Gamma < G$ comme le sous-groupe $N_{\text{virt}}(\Gamma, G)$ union des normalisateurs dans G des sous-groupes d'indice fini de Γ . Clairement le normalisateur virtuel est contenu dans le commensurateur $\text{Comm}(\Gamma, G) = \{g \in G, [\Gamma : \Gamma \cap g\Gamma g^{-1}] < \infty \text{ et } [\Gamma : \Gamma \cap g^{-1}\Gamma g] < \infty\}$. Sous les hypothèses du Théorème 5.3, le normalisateur virtuel est déjà dense.

Le résultat précédent s'applique en particulier aux groupes de Coxeter à angles droits de dimension 2. En fait la restriction sur la dimension est inutile.

Théorème 5.4. [cf. [41]] Soit (W, S) un système de Coxeter à angles droits. Ainsi $\mathfrak{Z}(W, S)$ est un complexe cubique $CAT(0)$ dont tous les sommets ont un link isomorphe à $N(W, S)$.

Alors le normalisateur virtuel (et donc le commensurateur) de W dans $\text{Aut}(\mathfrak{Z}(W, S))$ est dense.

□

La preuve utilise la forte convexité des boules duales combinatoires découlant de la Proposition 4.16.

5.3. Réseaux uniformes commensurables avec W .

Pour conjuguer un réseau uniforme $\Gamma < \text{Aut}(\mathfrak{Z}(W, S))$ dans W , notre méthode consiste à utiliser les systèmes de réflexions locales Γ -invariants (cf. Définition 3.2). Le critère suivant découle immédiatement du Théorème 3.7 :

Lemme 5.5. Un réseau uniforme $\Gamma < \text{Aut}(\mathfrak{Z}(W, S))$ est conjugué dans W si et seulement si Γ préserve un système de réflexions locales sans holonomie.

□

Un réseau uniforme Γ agissant librement sur l'ensemble des arêtes préserve toujours au moins un système de réflexions locales. Le problème est de trouver un sous-groupe d'indice fini de Γ qui préserve un système de réflexions locales sans holonomie. Il s'agit donc d'arriver à réduire progressivement l'holonomie d'un système de réflexions locales virtuellement invariant. Pour ce faire nous utilisons la propriété de séparabilité des sous-groupes quasi-convexes, que nous rappelons ci-dessous.

Définition 5.6. [sous-groupes séparables] Soit Γ un groupe et $\Lambda < \Gamma$ un sous-groupe. On dit que Λ est *séparable dans* Γ lorsque Λ est une intersection de sous-groupes d'indices finis de Γ - autrement dit, pour tout γ n'appartenant pas à Λ , il existe un sous-groupe $\Gamma' < \Gamma$ d'indice fini tel que $\Lambda \subset \Gamma'$ et $\gamma \notin \Gamma'$.

Par exemple le sous-groupe trivial est séparable si et seulement si le groupe est résiduellement fini.

Définition 5.7. [quasi-convexité combinatoire] Soit X un complexe zonotopal $CAT(0)$ et soit $Y \subset X^0$ un ensemble de sommets. Nous dirons que Y est $(K-)$ combinatoirement quasi-convexe si tous les sommets de toute géodésique combinatoire joignant deux points de Y sont à distance combinatoire $\leq K$ de Y .

Soit $\Lambda < \text{Aut}(X)$ un sous-groupe. Nous dirons que Λ est *convexe cocompact* s'il existe une partie $Y \subset X^0$ convexe telle que Y soit invariante sous Λ et Λ soit cofini sur Y . Nous dirons que Λ est *combinatoirement quasi-convexe* s'il existe une partie $Y \subset X^0$ combinatoirement quasi-convexe telle que Y est invariante sous Λ et Λ est cofini sur Y .

Nous obtenons alors le résultat suivant :

Théorème 5.8. [cf. Theorem 13.17 dans [40]] Soit (W, S) un système de Coxeter tel que le nerf fini de (W, S) soit de dimension 1 et de maille ≥ 4 . Soit Γ un réseau uniforme de $\text{Aut}(\mathfrak{Z}(W, S))$ dont les sous-groupes combinatoirement quasi-convexes sont séparables. Alors Γ possède un sous-groupe d'indice fini préservant un système de réflexions locales sans holonomie.

En combinant le résultat précédent avec un théorème remarquable de Wise sur les réseaux uniformes de certains complexes carrés (Theorem 8.1 de [79]), nous obtenons :

Théorème 5.9. [cf. Corollary 1.8 dans [40]] Soit (W, S) un système de Coxeter tel que le nerf fini de (W, S) soit un graphe bipartite et tous les m_{ij} finis soient égaux à un même nombre $m \geq 3$. Alors tout réseau uniforme de $\text{Aut}(\mathfrak{Z}(W, S))$ est commensurable à W .

La preuve fonctionne aussi pour les systèmes de Coxeter (W, S) tels que le nerf fini de (W, S) soit un graphe bipartite de maille ≥ 6 et tous les m_{ij} finis soient égaux à 2 - autrement dit (W, S) est un système de Coxeter à angles droits hyperbolique de dimension 2 et $N(W, S)$ est bipartite.

Le résultat de Wise utilisé ci-dessus assure la séparabilité des sous-groupes quasi-convexes des réseaux uniformes de certains complexes de dimension 2. Notons que l'hypothèse de bipartition du nerf fini de (W, S) est essentielle : on ne sait rien en général de la séparabilité des sous-groupes quasi-convexes des réseaux uniformes des complexes $\mathfrak{Z}(W, S)$, par exemple lorsque (W, S) est un système de Coxeter à angles droits hyperbolique de dimension 2.

Avec Dani Wise, nous travaillons actuellement à une généralisation en dimension supérieure. Cependant pour obtenir un résultat de commensurabilité généralisant le Théorème 5.9, il faudrait aussi trouver un critère généralisant le Théorème 5.8 à la dimension supérieure. Pour le moment la technique utilisée pour réduire progressivement l'holonomie des systèmes de réflexions locales virtuellement invariants ne se généralise pas. À vrai dire, certains cas hyperboliques de dimension 2 restent ouverts.

6. GROUPES DE COXETER À ANGLES DROITS.

Dans cette partie, (W, S) est un système de Coxeter à angles droits. Son complexe de Davis est donc un complexe cubique $CAT(0)$. Comme nous le verrons à la section 11, de très nombreux groupes classiquement étudiés en topologie de petite dimension sont sous-groupes quasi-convexes des groupes de Coxeter à angles droits.

Dans le cas à angles droits, la géométrie du complexe de Davis a des propriétés remarquables. Essentiellement les diverses notions de convexité introduites coïncident. Autrement dit une partie est combinatoirement convexe si et seulement si c'est l'ensemble des sommets d'un sous-complexe $CAT(0)$ -convexe, lequel est bien sûr fortement convexe - si et seulement si d'ailleurs la partie est L_1 -convexe.

Lemme 6.1. *[cf. [41]] Tout sous-groupe combinatoirement quasi-convexe Λ de W est (fortement) convexe-cocompact.*

La preuve utilise la convexité combinatoire des voisinages d'au plus Y^{+k} de parties Y quasi-convexes. En fait, par la Proposition 4.16 quitte à augmenter k , le sous-complexe correspondant à Y^{+k} est fortement convexe. La trace C' de Y^{+k} sur chaque cube C peut donc servir à paver le cube en utilisant le groupe engendré par les réflexions par rapport aux hyperplans ne coupant pas C' (si $C' \neq \emptyset$). Nous en déduisons ainsi une généralisation du théorème de Scott qui a été le point de départ de l'intérêt des géomètres pour la notion de séparabilité (cf. [70]) :

Théorème 6.2. *(cf. [41]) Soit W un groupe de Coxeter à angles droits. Alors tout sous-groupe combinatoirement quasi-convexe Λ de W est un rétract d'un sous-groupe d'indice fini $\Gamma < W$. En particulier Λ est séparable.*

Partie 2. Immeubles.

7. DÉFINITION ET GÉNÉRALITÉS.

Définition 7.1 (définition d'un immeuble par les W -distances). Soit (W, S) un système de Coxeter. Un *immeuble de type* (W, S) est un ensemble Δ muni d'une W -distance $\delta : \Delta \times \Delta \rightarrow W$, satisfaisant pour $x, y \in \Delta$:

- (1) $\delta(x, y) = 1$ si et seulement si $x = y$;
- (2) si $\delta(y, z) = s \in S$ alors

$$\delta(x, z) = \delta(x, y) \text{ ou } \delta(x, z) = \delta(x, y) \cdot s$$

et cette dernière relation a lieu si $|\delta(x, y) \cdot s| > |\delta(x, y)|$

- (3) pour tout $s \in S$ il existe $z \in \Delta$ tel que $\delta(x, z) = \delta(x, y) \cdot s$

Les éléments de Δ sont appelés les *chambres*. Pour $T \subset S$ et $c \in \Delta$ une chambre, l'ensemble $R_T(c, \Delta)$ (ou $R_T(c)$ s'il n'y a pas de confusion possible) des chambres c' telles que $\delta(c, c') \in W_T$ est le T -résidu de c (dans Δ). On a $R_T(c) = R_{T'}(c')$ si et seulement si $T = T'$ et $c' \in R_T(c)$, donc un résidu définit bien son type T de manière univoque. Le *rang* du résidu $R_T(c)$ est le cardinal de T . Un résidu $R_T(c)$ avec W_T fini est dit *sphérique*. Par exemple, le rang de l'immeuble est le cardinal de S et l'immeuble est dit sphérique lorsque W est fini.

Notons que groupe de Coxeter W muni de $\delta(w, w') = w(w')^{-1}$ est un immeuble de type (W, S) . Tout immeuble Δ de type (W, S) isomorphe à W est dit *fin*. Au contraire Δ est dit épais lorsque tous les résidus de rang 1 ont au moins 3 éléments.

Un automorphisme de (Δ, δ) est une permutation de Δ qui préserve δ .

Remarque 7.2. Historiquement, Tits a introduit les immeubles avec une définition beaucoup plus simpliciale (cf. [12]). Les définitions successivement données sont en fait équivalentes à la précédente, la plus récente : pour les détails nous renvoyons à notre référence sur les immeubles, [67].

Les immeubles initialement étudiés par Tits étaient de types sphériques, et avaient une origine algébrique : les groupes classiques agissent sur des immeubles.

Par la suite, Tits a étudié les immeubles de type affine (le groupe W est un réseau uniforme dans un espace euclidien), les idées et méthodes qu'il a alors utilisées sont devenues standards en géométrie $CAT(0)$.

Signalons une conséquence remarquable des axiomes d'immeuble :

Proposition 7.3. [*appartements et rétractions*] Soit (Δ, δ) un immeuble de type (W, S) .

Soient c, c' deux chambres de Δ . Alors c, c' sont contenues dans un même appartement, c'est-à-dire une partie $A \subset \Delta$ telle que pour toute chambre de base $c_0 \in A$, l'application $c \mapsto \delta(c, c_0)$ induise une bijection de A sur W .

De plus pour toute chambre c et tout appartement $A \subset \Delta$, il existe une (unique) application $\rho : \Delta \rightarrow A$ telle que $\rho(c') = c'$ pour $c' \in A$ et plus généralement pour $c' \in \Delta$ quelconque on a $\delta(c, \rho(c')) = \delta(c, c')$. L'application ρ est la rétraction sur A basée en c .

Davis a montré que les immeubles sont naturellement des objets à courbure ≤ 0 :

Théorème 7.4 (cf. [24]). *Soit (Δ, δ) un immeuble de type (W, S) . Soit $X = X(\Delta, \delta)$ la réalisation simpliciale de l'ensemble ordonné des résidus sphériques de Δ (donc X a pour sommets les résidus sphériques $R_T(c)$, avec un simplexe pour chaque chaîne $R_{T_1}(c) \subset \dots \subset R_{T_k}(c)$ de résidus sphériques).*

Alors X admet une distance de longueur complète et $CAT(0)$ (qui coïncide avec la distance de Moussong sur les sous-complexes de X correspondant aux appartements de Δ). Si de plus (W, S) ne contient pas de sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ alors on peut de même étendre la métrique $CAT(-1)$ définie par Moussong sur les appartements en une métrique de longueur complète $CAT(-1)$ sur X .

Le complexe X est appelé *réalisation géométrique (de Davis-Moussong)* de l'immeuble (Δ, δ) . La *dimension* de Δ est alors définie comme celle de X , la même que celle du complexe de Davis de (W, S) – ce qui correspond à $d + 1$ où d est la dimension du nerf fini de (W, S) .

La réalisation géométrique X est un complexe simplicial de drapeaux. De plus l'application qui a un sommet x de X correspondant à un résidu $R_T(c)$ associe la partie sphérique T définit sur X un (W, S) -type, c'est-à-dire une application simpliciale $t : X \rightarrow N$, où N désigne le cône de base la première subdivision barycentrique du nerf fini de (W, S) , et t est supposée être un isomorphisme sur l'étoile de tous les sommets x tels que $t(x)$ soit le sommet du cône N (soit $t(x) = \emptyset$). Nous appellerons *immeuble simplicial de type (W, S)* tout complexe simplicial de drapeaux muni d'un (W, S) -type isomorphe (en tant que complexe typé) à la réalisation géométrique d'un immeuble de type (W, S) muni de son (W, S) -type $t : X \rightarrow N$ naturel. Soit A un appartement de Δ . Alors la réunion des simplexes de X contenant un sommet correspondant à une chambre de A est appelé *appartement de X* .

Tout complexe simplicial X muni d'un (W, S) -type $t : X \rightarrow N$ définit naturellement un ensemble de chambres Δ : les sommets x tels que $t(x)$ soit le sommet du cône N , avec pour chaque $s \in S$ une notion de s -adjacence entre chambres définies par $x \sim_s x'$ si et seulement si x et x' sont liés à un même sommet y tel que $t(y) = \{s\}$. (Ainsi $(\Delta, (\sim_s)_{s \in S})$ est un *système de chambre de type (W, S)* , cf. [67]). Pour $T \subset S$ (sphérique ou non), appelons résidu de type T de X toute composante connexe du sous-complexe de X formé des simplexes σ tels que les sommets de $t(\sigma)$ sont des parties de T (éventuellement vides). Chaque T -résidu de X est lui-même un complexe simplicial muni d'un (W_T, T) -type (en restreignant t). Lorsque X est la réalisation géométrique d'un immeuble, les deux notions de résidus sont consistantes. La notion d'automorphisme à considérer sur un immeuble simplicial est celle d'automorphisme préservant le type.

Dans la pratique, pour établir qu'un certain complexe simplicial est un immeuble simplicial, on montre qu'il satisfait le critère ci-dessous, selon lequel la notion d'immeuble est essentiellement locale :

Théorème 7.5. [76], [31]

Soit X un complexe simplicial muni d'un (W, S) -type $t : X \rightarrow N$. Alors X est un immeuble simplicial de type (W, S) si et seulement si X est simplement connexe et chaque résidu sphérique de rang ≤ 3 est un immeuble simplicial (du type approprié).

Les types d'immeubles les plus étudiés jusqu'à présent correspondent aux (W, S) pour lesquels le nerf fini est une sphère. Ainsi supposons que W soit le groupe d'isométrie d'une variété riemannienne M^n simplement connexe à courbure constante $(\mathbb{S}^n, \mathbb{E}^n, \mathbb{H}^n)$ engendré par l'ensemble S des réflexions par rapport aux faces d'un polyèdre compact P de M^n . Alors les appartements d'un immeuble simplicial de type (W, S) sont isométriques (pour la métrique de Davis-Moussong) à M^n . Et un immeuble simplicial de type (W, S) est la première subdivision barycentrique d'un complexe polyédral X .

Le type sur l'immeuble simplicial correspond alors à une application polyédrale $t : X \rightarrow P$ – encore appelée *type* – qui est non dégénérée (un isomorphisme en restriction à toute cellule maximale). Nous appellerons *immeuble polyédral* tout complexe polyédral typé obtenu de cette façon. Ici encore, on dit d'un automorphisme polyédral qu'il est un automorphisme de l'immeuble seulement s'il préserve le type.

8. CONSTRUCTIONS D'IMMEUBLES ET DE COMPLEXES POLYGONAUX $CAT(0)$.

Tits a montré que les immeuble sphériques épais de rang ≥ 3 sont tous d'origine algébrique. En considérant un bord à l'infini, il en a déduit que de même les immeubles de type affine de rang ≥ 4 sont également de nature algébrique. Ce résultat d'algébricité est utilisé dans diverses preuves de rigidité quasi-isométriques, via la remarque suivante : les cônes asymptotiques des espaces symétriques de rang supérieur sont des immeubles de type affines.

En revanche il existe beaucoup d'immeubles de rang 2 non algébriques : par exemple les immeubles de type le groupe diédral à 6 éléments sont exactement les graphes d'incidence des plans projectifs. On peut s'attendre à ce qu'il existe une profusion d'immeubles dont les résidus sphériques sont de rang 2. En particulier en général on ne peut espérer aucune classification raisonnable des immeubles de type (W, S) tel que le nerf fini de (W, S) soit un graphe (pondéré) donné.

Ronan en dimension 2 ([66]), puis Ronan et Tits en général ([68]) ont donné une méthode de construction aussi libre que possible d'immeubles de types donnés.

Dans [9], Marc Bourdon a initié l'étude quasi-isométrique de certains immeubles $CAT(-1)$. Rappelons sa terminologie :

Définition 8.1 (immeubles fuchsien). Un immeuble (abstrait, simplicial ou polygonal) est dit *fuchsien* s'il est de type (W, S) avec W un groupe d'isométries discret cocompact du plan hyperbolique et S l'ensemble des réflexions par rapport aux côtés d'un domaine fondamental polygonal.

En nous inspirant de la notion de système de réflexions locales et d'holonomie de ces systèmes de réflexions locales (voir Définitions 3.2 et 3.4), nous avons développé un

procédé de construction d'immeubles fuchsien - et de complexes polygonaux typés plus généraux. Donnons d'abord une définition :

Définition 8.2. [complexe polyédral localement réflexif]

Soit X un complexe polyédral. On suppose que X admet un *type* $t : X \rightarrow P$ dans un certain polyèdre compact P , c'est-à-dire une application polyédrale qui est un isomorphisme en restriction à toute cellule maximale.

Soit F une face de X , le *voisinage de F dans X* est l'union $V(F, X)$ des faces G de X telles que $F \cap G \neq \emptyset$.

Soit a une arête de X . Une *réflexion locale en a* est la donnée d'un automorphisme σ_a du voisinage $V(a, X)$ qui échange les extrémités de a et préserve chaque face contenant a .

Nous dirons que X est *localement réflexif* s'il admet une réflexion locale en chacune de ses arêtes. Un système de réflexions locales σ sur X est la donnée d'une réflexion locale σ_a sur le voisinage de chaque arête a .

Supposons qu'un complexe polyédral X typé par $t : X \rightarrow P$ soit localement réflexif.

Alors P est lui-même localement réflexif, au sens où pour chaque arête a de P il existe un automorphisme polyédral de P échangeant les extrémités de a et préservant chaque face de P contenant a (un tel P n'est pas nécessairement un zonotope de Coxeter : par exemple tout polygone est réflexif, mais seuls les polygones ayant un nombre pair de sommets sont des zonotopes de Coxeter).

D'autre part, si on suppose de plus X connexe, alors tous ses sommets ont des links isomorphes, en composant les réflexions locales le long des chemins. Réciproquement si tous les sommets d'un complexe polyédral (connexe) X typé dans un polyèdre localement réflexif P ont des links isomorphes, cela n'entraîne pas nécessairement que X est localement réflexif. Tout ce qu'on peut dire, c'est que l'union des faces de X contenant une arête a donnée admet un automorphisme involutif échangeant les extrémités de a , tout en préservant chaque face contenant a . Mais rien n'assure a priori que cet automorphisme s'étend à $V(a, X)$. Par exemple, on peut construire des complexes polygonaux typés non localement réflexifs, où le type est à valeur dans un octogone, tels que tout les sommets ont des links isomorphes au 1-squelette d'un octaèdre.

Ainsi l'information locale plus précise que nous pourrions extraire est le type d'isomorphisme des voisinages d'arête. Comme nous nous contenterons d'exemples localement réflexifs, nous ne développons pas. Naturellement les types d'isomorphisme des voisinages de faces quelconques ont aussi leur intérêt :

Définition 8.3 (holonomies). Soit X un complexe polyédral typé par $t : X \rightarrow P$. Supposons que X soit localement réflexif et soit σ un système de réflexions locales sur X . Pour toute 2-face F de X et toute arête orientée \vec{a} du bord de F , soit $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p)$ le chemin fermé de ∂F faisant une fois le tour de F , avec $\vec{a}_1 = \vec{a}$. L'holonomie de σ en (\vec{a}, F) est la composée

$$h(\sigma, \vec{a}, F) = \sigma_{a_p|V(x_p, X)} \circ \dots \circ \sigma_{a_1|V(x_1, X)}$$

où x_i désigne l'origine de \vec{a}_i . Ainsi $h(\sigma, \vec{a}, F)$ est un automorphisme du voisinage de sommet $V(x_1, X)$ qui préserve F (voir Définition 3.4).

Soit F une face d'un polyèdre P . Un *voisinage abstrait de F (de type P)* est un complexe polyédral V typé par $t : V \rightarrow P$, contenant F , et tel que toute face de V rencontre F . Nous dirons que V est un L -voisinage si tous les sommets de F ont dans V un link isomorphe au complexe polyédral L (si P est un polytope simple alors un tel L est nécessairement un complexe simplicial).

Supposons maintenant que P soit un polygone et soit V voisinage abstrait de P . L'holonomie de V est la classe d'isomorphisme typé de V .

Les deux notions d'holonomie sont liées :

Lemme 8.4. *Soit P un polygone et soit X un complexe polygonal typé par $t : X \rightarrow P$. Supposons que X soit localement réflexif.*

Soit F un polygone de X et soit \vec{a} une arête orientée du bord de F d'origine x . Alors l'ensemble des holonomies $h(\sigma, \vec{a}, F)$ lorsque σ décrit l'ensemble de tous les systèmes de réflexions locales de X est une classe $h_X(\vec{a}, F)$ de $G(x, F)$ modulo le sous-groupe normal $G_X(x, a, F).G_X(x, a', F)$. (Ici $G_X(x, F)$ désigne le stabilisateur de F dans $G_X(x) = \text{Aut}(V(x, X))$, $G_X(x, a, F)$ est le sous groupe de $G(x, F)$ formé des automorphismes qui préservent a et chaque polygone contenant a , enfin a' désigne la deuxième arête de ∂F contenant x .)

Soient V, V' deux L -voisinages abstraits localement réflexifs de P , et soit \vec{a} une arête orientée du bord de P d'origine x . Alors V et V' sont isomorphes (par un isomorphisme typé) si et seulement si les classes $h_V(\vec{a}, P)$ et $h_{V'}(\vec{a}, P)$ sont identifiées (par un isomorphisme $V(x, V) \rightarrow V(x, V')$ fixant P point par point)

A voisinage V de sommet fixé, le groupe quotient $G_V(x, F)/G_V(x, a, F).G_V(x, a', F)$ contrôle donc les types possibles d'isomorphisme typés de voisinages de polygone. Le résultat suivant signifie que, pour certains immeubles, si on fixe l'holonomie des voisinages de polygone, alors cela détermine un unique immeuble localement réflexif, lequel possède un groupe d'automorphismes le plus grand possible. Si au contraire on autorise deux holonomies distinctes, alors il y a des constructions libres d'immeubles localement réflexifs, (de voisinages d'arêtes fixés).

Théorème 8.5 (cf. [38]). *Soit L un immeuble de rang 2 de maille $2m \geq 2$ associé à un groupe de type de Lie (si $m \geq 3$), ou bien un graphe bipartite complet (si $m = 2$). Soit $p \geq 4$ un entier. Soit h une classe d'isomorphisme de L -voisinage localement réflexif de p -gone.*

Alors il existe un et (à isomorphisme typé près) un seul immeuble fuchsien $\Delta(p, L, h)$ dont les chambres sont des p -gones, dont tous les sommets ont un link isomorphe à L , qui est localement réflexif et dont tous les voisinages de polygones sont d'holonomie h . De plus le groupe d'automorphismes de $\Delta(p, L, h)$ est transitif sur les sommets, et le stabilisateur d'un sommet contient des extensions à $\Delta(p, L, h)$ de tout automorphisme du link en ce sommet ($\simeq L$).

Par exemple lorsque $p = 2k$ et $h = 1$, l'immeuble $\Delta(p, L, h)$ est le complexe de Davis $\mathfrak{Z}(W, S)$ du système de Coxeter suivant :

- (1) la partie génératrice S est l'ensemble des sommets de L ,
- (2) l'ordre m_{st} vaut $+\infty$ quand s, t ne sont pas liés dans L et m_{st} vaut k sinon.

(les réflexions locales de l'immeuble correspondent alors aux restrictions des réflexions de (W, S)).

Si $m \geq 3$ et le degré de L est assez grand, alors il existe une infinité non-dénombrable d'immeubles fuchsien p -gonaux, dont tous les sommets ont un link isomorphe à L , et qui sont localement réflexifs.

Lorsque (W, S) admet un scindement, on peut obtenir les immeubles de type (W, S) par une construction arborescente. En adaptant la notion de réflexivité locale et en utilisant la description arborescente, nous avons aussi obtenu avec Frédéric Paulin :

Théorème 8.6. [cf. Théorème 4.10 et Corollaire 4.5 de [45]]

Supposons que (W, S) soit un système de Coxeter scindé, autrement dit $S = \{s_+, s_-\} \sqcup S_0$ et $m_{s_+s_-} = +\infty$. Posons $S_+ = S_0 \cup \{s_+\}$, $S_- = S_0 \cup \{s_-\}$. Soit $\Delta_+, \Delta_-, \Delta_0$ trois immeubles de type (W_{S_+}, S_+) , (W_{S_-}, S_-) , (W_{S_0}, S_0) , avec $\Delta_0 \subset \Delta_-$ et $\Delta_0 \subset \Delta_+$. On suppose que $\text{Aut}(\Delta_{\pm})$ est transitif sur les chambres (donc tous les S_0 -résidus de Δ_{\pm} sont isomorphes à Δ_0).

Supposons qu'il existe un automorphisme g_0 de Δ_0 qui n'est pas de la forme $g_0 = g_-g_+$ avec g_{\pm} restriction d'un automorphisme de Δ_{\pm} préservant Δ_0 . Alors il existe une infinité non dénombrable d'immeubles Δ de type (W, S) deux à deux non isomorphes, tels que tout S_{ε} -résidu de Δ soit isomorphe à Δ_{ε} (pour $\varepsilon \in \{-, 0, +\}$).

Donnons une application concrète aux immeubles hyperboliques de dimension 3.

Soit $P \subset \mathbb{H}^3$ un polytope hyperbolique de dimension 3 dont toutes les 2-faces ont un nombre pair de côtés, et dont tout sommet appartient à trois arêtes. On suppose que les angles dièdres de P sont de la forme $\frac{\pi}{m}$, de sorte que le groupe $W(P)$ engendré par l'ensemble $S(P)$ des réflexions par rapport aux faces de P est un groupe de Coxeter. On suppose en plus que les arêtes de P sont colorées dans un ensemble à trois éléments $\{a_1, a_2, a_3\}$, de sorte que :

- (1) deux arêtes adjacentes ont des couleurs distinctes
- (2) sur chaque 2-face n'apparaissent que deux couleurs
- (3) à deux arêtes de même couleur a_i correspondent le même angle dièdre $\frac{\pi}{m_i}$
- (4) $m_1 > 2, m_2 > 2, m_3 = 2$

Par exemple, on peut prendre pour P l'unique prisme hyperbolique à bases hexagonales dont les angles dièdres aux arêtes horizontales (i.e. contenues dans l'un des hexagones) est $\frac{\pi}{3}$, tandis que les angles dièdres aux arêtes verticales sont droits.

Corollaire 8.7. [cf. Corollaire 4.12 de [45]]

Pour tout immeuble sphérique fini L de type le groupe du triangle d'angles $\frac{\pi}{m_1}, \frac{\pi}{m_2}, \frac{\pi}{m_3}$, algébrique sur un corps de cardinal assez grand, il existe une infinité non dénombrable d'immeubles Δ de type $(W(P), S(P))$ deux à deux non isomorphes, tels que tout sommet de Δ possède un link isomorphe à L .

9. IMMEUBLES À ANGLES DROITS.

Le cas à angles droits diffère notablement des autres types.

Théorème 9.1. [Proposition 5.1 de [45]] Soit (W, S) un système de Coxeter à angles droits et soit $(q_s)_{s \in S}$ une famille de nombres ≥ 2 . Alors il existe un et un seul immeuble $\Delta(W, S, (q_s)_{s \in S})$ de type (W, S) dont tous les résidus de type $\{s\}$ ont cardinal q_s .

Par exemple, pour $p \geq 4$, considérons le groupe engendré par les réflexions par rapport à un polygone à p sommets et à angles droits contenu dans le plan de courbure constante κ ($\kappa = 0$ si $p = 4$ et $\kappa = -1$ si $p > 4$). À isomorphisme près, le groupe est indépendant du polygone choisi : notons (W_p, S_p) le système de Coxeter (à angle droit) ainsi obtenu. Choisissons maintenant des entiers q_1, \dots, q_p tous ≥ 2 . Alors il existe un unique immeuble polygonal dont tous les polygones sont des p -gones, et dont tous les sommets de type $\{i, j\}$ sont des graphes bipartites complets sur $q_i + q_j$ sommets. Ce résultat est dû à Marc Bourdon (cf. [9]), qui note $I_{p, (q_1, \dots, q_p)}$ cet immeuble. Lorsque tous les q_i sont égaux à un même entier q , on utilisera la notation I_{pq} . Par exemple I_{4q} est le produit de deux arbres réguliers de valence q , et pour $p \geq 5$ les immeubles I_{pq} sont des versions hyperboliques du produit de deux arbres.

En fait dans le cas localement compact l'immeuble $\Delta(W, S, (q_s)_{s \in S})$ correspond à une construction algébrique familière. Soit donc (W, S) un système de Coxeter à angles droits et soit $(G_s)_{s \in S}$ une famille de groupes (finis) d'ordres ≥ 2 . Soit \mathcal{G} le 1-squelette du nerf fini de (W, S) . Alors le produit graphé des G_s le long de \mathcal{G} est le groupe $\Gamma(\mathcal{G}, (G_s)_{s \in S})$ obtenu en quotientant le produit libre des G_s par le sous-groupe normal engendré par les commutateurs $[g, h]$ pour $g \in G_s, h \in G_t$ et $\{s, t\}$ est une arête de \mathcal{G} (i.e. $[s, t] = 1$).

Pour le type (W_p, S_p) étudié par M. Bourdon et en prenant comme groupes $G_i = \frac{\mathbb{Z}}{q_i\mathbb{Z}}$, on obtient un produit graphé Γ_{pq} : pour $p = 4$ c'est un produit de deux groupes virtuellement libres, et pour $p \geq 5$ c'est un groupe hyperbolique dont M. Bourdon a précisément étudié la quasi-isométrie.

En toute généralité, le produit graphé $\Gamma(\mathcal{G}, (G_s)_{s \in S})$ admet une réalisation simpliciale X qui se révèle être un immeuble. Les sommets de X sont les classes à droite $g\Gamma_T$, où $T \subset S$ est une partie sphérique et Γ_T désigne le sous-groupe de $\Gamma(\mathcal{G}, (G_s)_{s \in S})$ engendré par les $G_t, t \in T$. L'ensemble de ces classes est ordonné par inclusion, et il y a un simplexe dans X sur tout ensemble totalement ordonné de classes à droite sphériques. On vérifie aisément que le type T d'une classe $g\Gamma_T$ est bien défini, et ceci définit bien un (W, S) -type $X \rightarrow N$ (où comme d'habitude N désigne le nerf fini de (W, S)). Les résidus sphériques de X sont des suspensions multiples, ce sont des réalisations simpliciales d'immeubles du type sphérique correspondant, donc X est bien un immeuble simplicial de type (W, S) .

Notons que $\Gamma(\mathcal{G}, (G_s)_{s \in S})$ agit sur X par automorphisme d'immeubles, et l'action est simplement transitive sur les chambres. Il en résulte que tous les résidus de type $\{s\}$ ont pour cardinal $|G_s| = q_s$, donc X est isomorphe à $\Delta(W, S, (q_s)_{s \in S})$.

Théorème 9.2. (cf. [40]) *Supposons $|G_s| = q_s < +\infty$, de sorte que $\Gamma(\mathcal{G}, (G_s)_{s \in S})$ est un réseau uniforme de l'immeuble localement fini $\Delta(W, S, (q_s)_{s \in S})$.*

Alors un réseau uniforme de $\Delta(W, S, (q_s)_{s \in S})$ (préservant le type) est commensurable à $\Gamma(\mathcal{G}, (G_s)_{s \in S})$ (dans le groupe des automorphismes préservant le type) si et seulement si ses sous-groupes combinatoirement quasi-convexes sont séparables.

Notons que la partie directe généralise le théorème de Scott pour les groupes de Coxeter à angles droits (cf. Théorème 6.2) au cas des produits graphés de groupes finis (non nécessairement d'ordre 2).

En utilisant un résultat de Wise assurant que pour $p \geq 6$ tous les sous-groupes quasi-convexes des réseaux uniformes de I_{pq} sont séparables (cf. [79]), nous obtenons :

Théorème 9.3. (cf. [40]) *Pour $p \geq 6$, tous les réseaux uniformes de l'immeuble fuchsien I_{pq} sont commensurables.*

Partie 3. Espaces à murs, complexes cubiques $CAT(0)$, espaces médians.

10. ESPACES À MURS.

10.1. **Définitions, premières propriétés.** Inspirés par la géométrie si attrayante du complexe de Davis nous avons proposé avec F. Paulin la définition suivante (cf. [44]) :

Définition 10.1. [espaces à murs] Soit X un ensemble. Un *mur de X* est un ensemble $m = \{h, h'\}$ de deux parties de X avec $X = h \cup h'$ et $h \cap h' = \emptyset$. Les deux éléments h, h' de la partition sont alors appelés les deux *demi-espaces (ou moitiés) délimités par m* . On dit qu'un mur m *sépare x de y* si l'un des deux demi-espaces délimités par m contient x et le demi-espace complémentaire contient y .

Une *structure d'espace à murs sur X* est la donnée d'un ensemble \mathcal{M} de murs tel que pour deux points x, y quelconques de X l'ensemble $\mathcal{M}(x|y)$ des murs de \mathcal{M} qui séparent x de y est fini. Pour deux parties $A = \{a_1, a_2, \dots\}, B = \{b_1, b_2, \dots\}$ quelconques de X nous noterons $\mathcal{M}(A|B)$ (ou $\mathcal{M}(a_1, a_2, \dots | b_1, b_2, \dots)$) l'ensemble des murs $m \in \mathcal{M}$ tels que l'un des deux demi-espaces h délimité par m contient A et est disjoint de B .

Notons la relation remarquable $\mathcal{M}(x|z) \Delta \mathcal{M}(z|y) = \mathcal{M}(x|y)$. La *distance de murs sur X* est le cardinal $d(x, y)$ de $\mathcal{M}(x|y)$ (d est une pseudo-distance ou un écart sur X). Nous dirons que l'espace à murs est séparé lorsque d est une distance, autrement dit si deux points distincts quelconques sont séparés par un mur de \mathcal{M} .

Un automorphisme d'un espace à murs (X, \mathcal{M}) est une permutation $f : X \rightarrow X$ de X qui préserve \mathcal{M} . Un tel automorphisme est naturellement une isométrie de (X, d) .

Une question naturelle est de savoir si une métrique donnée est une métrique de murs - ou est proche d'une métrique de murs. D'autre part, un groupe de type fini donné admet-il une action "non triviale" (au moins métriquement propre) sur un espace à murs ?

Soit (X, \mathcal{M}) un espace à murs. Notons \mathcal{H} l'ensemble des demi-espaces de X délimités par une moitié $m \in \mathcal{M}$. Pour x, y deux points de X , soit $\mathcal{H}(x|y)$ l'ensemble (fini) des demi-espaces $h \in \mathcal{H}$ tels que $x \in h$ et $y \notin h$. Notons $\ell^2(\mathcal{H})/\sim$ l'espace de Hilbert (réel) quotient de $\ell^2(\mathcal{H})$ par le sous-espace vectoriel fermé engendré par les vecteurs $h + h^c$. L'application $X \times X \rightarrow \ell^2(\mathcal{H})/\sim$ envoyant (x, y) sur la classe de la somme (finie) des vecteurs h avec $h \in \mathcal{H}(x|y)$ sera notée $(x, y) \mapsto \vec{xy}$. Elle vérifie la relation de Chasles $\vec{xy} = \vec{xz} + \vec{zy}$. Ceci fournit une application de (X, d) dans un espace de Hilbert affine $L_2(X, d)$ d'espace vectoriel sous-jacent $\ell^2(\mathcal{H})/\sim$: cette application $i_2 : X \rightarrow L_2(X, d)$ vérifie $\|i_2(x) - i_2(y)\|^2 = d(x, y)$. Cette construction est naturelle : le groupe d'automorphismes de (X, \mathcal{M}) agit par isométries sur $L_2(X, d)$, et l'application $i_2 : X \rightarrow L_2(X, d)$ est équivariante. Compte-tenu des interprétations des propriétés (T) de Kazhdan et anti-T en terme d'action sur des espaces de Hilbert affine, nous obtenons le résultat suivant (qui relève du folklore, voir par exemple [20]) :

Lemme 10.2. *Tout groupe agissant proprement par automorphismes sur un espace à murs est anti-T. Tout groupe (T) agissant par automorphismes sur un espace à murs a une orbite bornée.*

On peut reprendre la construction précédente en remplaçant $\ell^2(\mathcal{H})/\sim$ par $\ell^1(\mathcal{H})/\sim$ (avec toujours \sim la relation fermée engendrée par $h^c = -h$) ou même $\ell^p(\mathcal{H})/\sim$ ($1 \leq p < \infty$). Cela fournit une application naturelle de $i_p : X \rightarrow L_p(X, d)$, où $L_p(X, d)$ est un espace affine d'espace de Banach sous-jacent l'espace $\ell^p(\mathcal{H})/\sim$. De plus on a $\|i_p(x) - i_p(y)\|^p = d(x, y)$.

Corollaire 10.3. *Une métrique de mur se plonge isométriquement dans ℓ^1 , sa racine carrée dans un espace de Hilbert.*

Définition 10.4. Soient m, m' deux murs de X . Nous disons que m et m' se coupent s'il existe quatre points a, b, c, d de X tels que $m \in \mathcal{M}(a, d|b, c)$ et $m' \in \mathcal{M}(a, b|c, d)$.

Nous dirons que deux demi-espaces h, h' sont *tangents* si $h' \subset h^c$, $h' \neq h^c$ et h' est maximal pour ces deux propriétés. Nous dirons que deux murs m, m' sont *tangents* s'ils délimitent des demi-espaces h, h' qui sont tangents.

10.2. Exemples.

1) Soit E un espace topologique connexe par arcs muni d'une famille localement finie $(H_i)_{i \in I}$ de sous-espaces fermés d'intérieur vide tels que chaque H_i sépare E en deux composantes connexes (notées $E^+(H_i)$ et $E^-(H_i)$).

Alors le complémentaire de la réunion des H_i est un ouvert O dense dans E . Soit X l'ensemble des composantes connexes de O . Pour chaque $x \in X$, on choisit un point \hat{x} de O dans la composante x . À tout sous-espace H_i est naturellement associé un mur de X : si on note h_i^\pm l'ensemble des $x \in X$ tels que $x \subset E^\pm(H_i)$ alors $X = h_i^+ \sqcup h_i^-$ et donc $m_i = \{h_i^+, h_i^-\}$ est un mur de X . De plus l'ensemble des murs m_i séparant $x, y \in X$ correspond à l'ensemble des sous-espaces H_i séparant \hat{x} de \hat{y} , lequel est fini puisque \hat{x} et \hat{y} sont connectés par un arc et $(H_i)_{i \in I}$ est localement finie. Nous dirons que X est l'espace à murs associé à $(E, (H_i)_{i \in I})$.

De cet exemple procède la plupart des autres.

2) Soit E un arbre, soit I l'ensemble des arêtes de E . Pour tout i soit p_i le milieu de l'arête i puis soit $H_i = \{p_i\}$. Alors l'espace à murs associé à $(E, (H_i)_{i \in I})$ s'identifie à l'ensemble des sommets de E , la distance de murs étant la distance combinatoire dans E .

3) Espace à murs d'un système de Coxeter (W, S) .

Pour tout système de Coxeter (W, S) , nous avons déjà considéré à la Définition 4.1 une structure d'espace à murs sur W (dont la distance de murs est la distance des mots de (W, S)). En fait cette structure est celle associée à $(E, (H_i)_{i \in I})$, où E désigne le complexe de Davis et où les H_i sont les ensembles de points fixes dans E des réflexions de (W, S) (cf. Définition 4.1).

La structure d'espace à murs associée au complexe de Davis se généralise.

4) Complexes zonotopaux $CAT(0)$.

Soit E un complexe zonotopal $CAT(0)$, autrement dit un complexe zonotopal muni d'une distance géodésique qui est $CAT(0)$ et induit sur chaque zonotope une distance dont le groupe d'isométrie contient le groupe de Coxeter du zonotope. Nous supposons

E localement compact. Pour toute arête a de E , soit $H(a)$ l'ensemble des points de E équidistants des extrémités de a .

Lemme 10.5. *Pour toute arête a de E , le sous-ensemble $H(a)$ est $CAT(0)$ -convexe dans E , c'est un sous-complexe de la première subdivision barycentrique de E qui sépare E en deux ouverts convexes. La trace de $H(a)$ sur un zonotope de E est vide ou un hyperplan de réflexion du zonotope.*

Nous dirons que les ensembles médiateurs d'arêtes $H(a)$ sont les *hyperplans* de E . Nous pouvons alors considérer l'espace à murs (X, \mathcal{M}) associé à E muni de la famille de tous ses hyperplans. Le résultat suivant résume les premières propriétés de cet espace à murs.

Théorème 10.6 (cf. Lemme 4.8, Corollaire 4.10 et Proposition 4.11 dans [44]). *X s'identifie à l'ensemble des sommets de E . La distance de murs sur X correspond à la distance combinatoire sur le 1-squelette E^1 . Un chemin combinatoire de E^1 est une géodésique combinatoire si et seulement si la suite des hyperplans qu'il traverse est sans répétition.*

Le résultat suivant donne une interprétation géométrique des relations “se couper” ou “être tangents” pour des murs abstraits.

Lemme 10.7. *Soient H, H' deux hyperplans de E . Alors $H \cap H' \neq \emptyset$ si et seulement si ou bien $H = H'$, ou bien les murs m, m' de $X = E^0$ correspondant à H, H' se coupent, auquel cas il existe une face polygonale séparée par H, H' au centre de laquelle ces deux hyperplans se coupent. Et m, m' sont tangents si et seulement s'il existe deux arêtes distinctes a, a' séparées par H, H' , telles que a, a' contiennent un même sommet, mais ne sont pas contenues dans une même face.*

Dans l'énoncé suivant, on appelle *propre* tout demi-espace h tel que, pour tout $R \geq 0$, le demi-espace h n'est pas contenu le R -voisinage du complémentaire h^c , et le R -voisinage de h ne contient pas h^c :

Théorème 10.8. *[Groupes simples d'automorphismes, voir [44]] Soit X un complexe zontopale $CAT(0)$ localement compact. Soit G le groupe des automorphismes de X , muni de la topologie compacte-ouverte. Supposons que G contienne un groupe Γ discret co-compact et Gromov-hyperbolique. Alors le sous-groupe G^+ engendré par les fixateurs de demi-espace propre est presque simple : les sous-groupes distingués stricts sont contenus dans le noyau de l'action de G sur le bord idéal ∂X , lequel est compact.*

Tous ces résultats sur les complexes zontopaux $CAT(0)$ s'appliquent en particulier aux complexes cubiques $CAT(0)$. Mais ces espaces sont si importants que nous leur consacrerons une étude plus approfondie.

10.3. Complexes cubiques $CAT(0)$.

10.3.1. *Universalité des complexes cubiques $CAT(0)$.* Les complexes cubiques $CAT(0)$ sont des cas particuliers de complexes zonotopaux $CAT(0)$, donc leur ensemble de sommets est naturellement muni d'une structure d'espace à murs donnée par les hyperplans. Mais les complexes cubiques $CAT(0)$ ne sont pas qu'un cas particulier : cette classe contient tous les espaces à murs :

Théorème 10.9. [cf. [18], [57]] *A tout espace à murs (X, \mathcal{M}) est associé un complexe cubique $CAT(0)$ naturel $\text{Cub}(X, \mathcal{M})$ et une application $\sigma : X \rightarrow \text{Cub}(X, \mathcal{M})^0$ qui a les propriétés suivantes :*

- (1) *Pour tout demi-espace h de $\text{Cub}(X, \mathcal{M})^0$, l'image réciproque $\sigma^{-1}(h)$ est un demi-espace de (X, \mathcal{M}) .*
- (2) *Tout demi-espace de (X, \mathcal{M}) est l'image réciproque par σ d'un et d'un seul demi-espace de $\text{Cub}(X, \mathcal{M})^0$.*

Ainsi σ induit une bijection σ_ de \mathcal{H} sur l'ensemble des demi-espaces de $\text{Cub}(X, \mathcal{M})^0$ (et ainsi une bijection de \mathcal{M} sur l'ensemble des murs de l'ensemble des sommets de $\text{Cub}(X, \mathcal{M})$).*

- (3) *La bijection σ_* est croissante pour l'inclusion.*

Tout automorphisme de (X, \mathcal{M}) induit un automorphisme de $\text{Cub}(X, \mathcal{M})$.

On peut vérifier que $\sigma : X \rightarrow \text{Cub}(X, \mathcal{M})^0$ est caractérisée par le fait d'être maximale parmi toutes les applications $f : (X, \mathcal{M}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{M}_Y)$ entre espaces à murs vérifiant les propriétés énumérées dans le théorème (avec (Y, \mathcal{M}_Y) séparé).

Notons que les propriétés "se coupent" (ou "sont tangents") sont équivalentes pour m, m' (respectivement h, h') et pour $\sigma_*(m), \sigma_*(m')$ (respectivement $\sigma_*(h), \sigma_*(h')$).

Le théorème précédent de "cubulation" justifie l'attention portée aux actions de groupes sur les complexes cubiques $CAT(0)$. Dans les situations concrètes, il est souvent naturel de considérer une certaine structure d'espace à murs, invariante sous le groupe considéré. Le résultat précédent de géométrisation fournit alors une action du groupe sur un complexe cubique $CAT(0)$.

Ainsi tout groupe de Coxeter agit sur son espace à murs naturel, donc sur le complexe cubique $CAT(0)$ associé (construction de Niblo-Reeves, cf. [56]).

Il faut noter qu'a priori $\sigma : X \rightarrow \text{Cub}(X, \mathcal{M})^0$ n'est pas quasi-surjective. Certes $\sigma : X \rightarrow \text{Cub}(X, \mathcal{M})^0$ est une isométrie, mais l'image $\sigma(X)$ n'est pas nécessairement combinatoirement quasi-convexe. De même le complexe cubique $CAT(0)$ associé à l'espace à murs (X, \mathcal{M}) n'est pas nécessairement Γ -cocompact - même si Γ est un groupe cocompact sur l'espace à murs.

Un exemple simple est donné par le groupe de Coxeter W engendré par les réflexions par rapport aux côtés d'un triangle équilatéral du plan euclidien. Le complexe cubique $CAT(0)$ associé est le pavage cubique de l'espace euclidien de dimension 3, qui contient l'espace à murs de W sous la forme de l'ensemble des sommets dont la somme des coordonnées vaut 0 ou 1 (les coordonnées sont prises dans un repère orthonormé de vecteurs parallèles aux arêtes des cubes du pavage).

Exemple 10.10 (quelques cubulations classiques).

- (1) **Sous-groupes de codimension 1.** Soit Γ un groupe engendré par un ensemble fini S . Un sous-groupe $H < \Gamma$ est dit *de codimension 1* si le quotient du graphe de Cayley de (Γ, S) par H a plusieurs bouts (cf. [49], [70]). Il existe alors une partie $h \subset \Gamma$ qui est H -invariante à gauche, presque invariante à droite (pour $\gamma \in \Gamma$ la différence symétrique $h\gamma \Delta h$ est finie) et propre (au sens où h a une image dans $H \backslash \Gamma$ qui est infinie et de complémentaire infinie). Le complémentaire de h a les mêmes propriétés. Et les translatés de h à droite aussi. Dans [69], Michah Sageev montre que l'ensemble G muni des partitions constitue un espace à murs, et il construit explicitement le complexe cubique $CAT(0)$ associé $C(\Gamma, h)$ (ce complexe dépend a priori du choix de h). Par naturalité G agit (à gauche) sur $C(\Gamma, h)$. Notons que c'est cette construction (adaptée au contexte algébrique) qui a servi de modèle pour la cubulation des espaces à murs généraux.

En utilisant des idées analogues, Gerasimov a obtenu des résultats un peu plus précis que ceux de Sageev :

Théorème 10.11 (cf. [32]). *Soit $H < \Gamma$ un sous-groupe de codimension 1. Alors Γ admet une action sans point fixe sur un complexe cubique $CAT(0)$ telle que le stabilisateur d'un certain hyperplan contienne H avec indice fini.*

Réciproquement, si Γ agit sans point fixe sur un complexe cubique $CAT(0)$, alors le stabilisateur de l'un des hyperplans est de codimension 1.

- (2) **Groupes à petite simplification.** Le complexe de Cayley d'une présentation à petite simplification $C'(1/6)$ possède toutes les propriétés d'un complexe polygonal $CAT(-1)$ dont les faces ont au moins sept côtés - mis à part que le link d'un sommet est seulement un multi-graphe : il y a en général des polygones recollés le long de deux arêtes consécutives. Cependant Dani Wise a réussi à définir dans ces graphes de Cayley des "hyperplans" analogues à ceux des complexes polygonaux pairs : la trace d'un hyperplan sur une 2-face est un segment joignant le milieu d'une arête au milieu de l'arête opposée. Il a pu montrer que ces hyperplans définissent bien des sous-graphes séparants du 2-complexe de Cayley, et a adapté la construction de Sageev aux 2-complexes à petite simplification.

Théorème 10.12 (cf. [80]). *Soit Γ un groupe à petite simplification $C'(1/6)$. Alors Γ admet une action discrète cocompacte sur un complexe cubique $CAT(0)$.*

10.3.2. *Géométrie combinatoire des complexes cubiques $CAT(0)$.* Dans cette partie, nous donnons des résultats variés sur les complexes cubiques $CAT(0)$.

Notons d'abord que la condition $CAT(0)$ admet une caractérisation combinatoire.

Théorème 10.13 ([34], cf. aussi [42]). *Soit X un complexe cubique simplement connexe. On munit X de la métrique de longueur faisant de chaque cube un cube euclidien d'arête unité. Alors cette distance est de longueur, complète et satisfait l'inégalité métrique*

$CAT(0)$ si et seulement si le link de tout point de X est un complexe simplicial de drapeau (cf. Définition 4.15).

Gromov a montré ce résultat lorsque X est de dimension finie, on peut l'étendre au cas général car l'enveloppe convexe combinatoire d'une partie finie de X^0 est finie. Grâce à cette caractérisation combinatoire, on peut envisager des espaces à courbure ≤ 0 en dimension arbitraire (la vérification de l'inégalité $CAT(0)$ n'est facile que pour les complexes polygonaux, mais en général c'est un tour de force que de montrer l'inégalité $CAT(1)$ pour les links en dimension supérieure). D'autre part, le caractère essentiellement combinatoire de la condition $CAT(0)$ suggère de trouver (et d'exploiter) des formulations combinatoires pour diverses propriétés géométriques. Voici deux exemples (la preuve apparaît par exemple dans [47]) :

Lemme 10.14. *Soit X, Y deux complexes cubiques $CAT(0)$ et soit $f : X \rightarrow Y$ une application qui est une isométrie sur chaque cube de X (d'image un cube de Y). Alors f est un plongement isométrique si et seulement si pour tout sommet de x l'application induite $f_x : \text{link}(x, X) \rightarrow \text{link}(f(x), Y)$ est d'image un sous-complexe plein.*

Lemme 10.15. *Soit X un complexe cubique $CAT(0)$ et $Y \subset X$ un sous-complexe plein de X (tout cube de X dont les sommets sont dans Y appartient à Y). Sont équivalentes :*

- (1) Y est $CAT(0)$ -convexe,
- (2) Y^0 est combinatoirement convexe dans X^1 ,
- (3) Y^0 est L_1 -convexe dans X^1 ,
- (4) Y est fortement convexe.

Corollaire 10.16. *[Théorème de Helly] Soit C_1, \dots, C_n des sous-complexes convexes d'un complexe cubique $CAT(0)$. Si les C_i ont deux à deux une intersection non vide, alors $\cap_i C_i$ est non vide.*

En combinant la description des convexes comme intersection de demi-espaces, et le fait que les demi-espaces sont L_1 -convexes, nous obtenons la version géométrique générale du Lemme 6.1 (sans groupes) :

Théorème 10.17. *Soit X un complexe cubique $CAT(0)$ uniformément localement fini. Soit $Y \subset X^0$ une partie combinatoirement quasi-convexe. Alors un voisinage fini convenable Y^{+k} est convexe. En particulier un sous-groupe combinatoirement quasi-convexe de $\text{Aut}(X)$ est toujours convexe-cocompact.*

Le résultat suivant fait le lien avec les produits d'arbres - qui sont des exemples triviaux de complexes cubiques $CAT(0)$.

Proposition 10.18. *Soit X un complexe cubique $CAT(0)$. Supposons que X soit uniformément localement fini et que la distance combinatoire soit Gromov-hyperbolique. Alors il existe des arbres T_1, \dots, T_k et un plongement combinatoire $X \rightarrow T_1 \times \dots \times T_k$ qui est une isométrie pour les métriques combinatoires des 1-squelettes.*

Ce résultat est sans doute du folklore de la théorie, mais nous n'en avons pas trouvé de preuve écrite. Nous donnons donc une esquisse d'argument.

Démonstration. On considère les boules combinatoires duales B_n , avec B_0 un point et B_{n+1} l'union des cubes touchant B_n . Alors B_n est convexe.

Soit \mathcal{G}_n le graphe (fini) dont les sommets sont les hyperplans de B_n , avec une arête entre deux hyperplans s'ils sont distincts et se coupent (dans le complexe cubique B_n)

Fait : la suite des nombres chromatiques de \mathcal{G}_n est bornée.

Tout d'abord, par convexité de B_n , l'application $\mathcal{G}_n \rightarrow \mathcal{G}_{n+1}$ est une inclusion d'image pleine. Donc pour définir une coloration sur \mathcal{G}_{n+1} il suffit d'en définir une sur \mathcal{G}_n , puis de l'étendre aux murs traversant B_{n+1} mais seulement tangents à B_n . Ceci peut se faire en utilisant un nombre borné de couleurs par le résultat suivant.

Lemme 10.19. *Soit M un sommet de \mathcal{G}_{n+1} non dans \mathcal{G}_n . Alors le degré de M dans \mathcal{G}_{n+1} est borné indépendamment de M et de n .*

Démonstration. Notons $V(M)$ l'union des cubes de X rencontrant l'hyperplan M . Montrons que l'intersection $V(M) \cap B_n$ est de diamètre uniformément borné. Pour cela considérons plutôt la distance d' dont les B_n sont les boules. Elle est quasi-isométrique à la distance de murs, d'après l'hypothèse de locale finitude.

Si x est un sommet de $V(M) \cap B_n$ alors $d'(x, \omega) \leq n$, avec ω le centre de B_n : en effet M ne coupe pas l'intérieur de B_n . Puisque $V(M)$ est convexe pour la métrique de murs, il existe une constante K telle que $V(M)$ soit K -quasi-convexe pour d' . Soit δ la constante d'hyperbolicité de d' .

Supposons que $V(M) \cap B_n$ contiennent deux sommets x, y avec $d'(x, y) \geq 2L$ pour un certain entier L . Soit z un point sur une d' -géodésique de x à y , avec $d'(x, z) = L$ (et donc $d'(y, z) \geq L$). Par K -quasi-convexité, il existe un sommet p dans $V(M)$ tel que $d'(p, z) \leq K$. D'autre part choisissons deux d' -géodésiques de ω à x et de ω à y respectivement. Par δ -hyperbolicité, il existe un point q sur l'une de ces deux géodésiques tel que $d'(z, q) \leq \delta$. Donc $d'(x, q) \geq L - \delta$ (ou $d'(y, q) \geq L - \delta$), puis $d'(\omega, q) \leq n - (L - \delta)$. Il vient $d'(\omega, p) \leq n - (L - \delta) + \delta + K$. Comme $V(M) \cap B_{n-1} = \emptyset$ on a aussi $d'(\omega, p) \geq n$. Des deux majorations nous tirons $L \leq K + 2\delta$. Ceci borne le diamètre de $V(M) \cap B_n$.

Maintenant si un mur M' de B_{n+1} coupe M , alors comme les trois convexes $B_n, V(M)$ et $V(M')$ sont deux à deux d'intersection non vide, nous en déduisons que $V(M')$ coupe $B_n \cap V(M)$ (par le Corollaire 10.16). Cette dernière intersection est de diamètre $\leq 2(K + 2\delta)$, donc par l'hypothèse de locale finitude uniforme, il existe une constante Δ telle que le nombre de murs de X passant à proximité de $B_n \cap V(M)$ soit majoré par Δ , ce qui achève la preuve du Lemme. □

Le graphe \mathcal{G} dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des hyperplans de X , avec une arête entre deux hyperplans s'ils se coupent orthogonalement dans un carré, est la réunion croissante $\mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2 \rightarrow \dots$. D'après l'argument précédent ce graphe (bien que non localement fini) a un nombre chromatique fini. Toute coloration de l'ensemble

des sommets de \mathcal{G} dans l'ensemble fini $\{1, \dots, k\}$ fournit canoniquement un plongement isométrique de X^1 dans le produit d'arbres $T_1 \times \dots \times T_k$, où T_i désigne l'arbre dont les sommets sont les composantes connexes du graphe X^1 dans lequel on retire les arêtes transverses à un hyperplan de couleur i , avec une arête entre deux sommets de T_i pour chaque hyperplan de couleur i .

□

Lorsqu'un groupe Γ agit sur le complexe cubique $CAT(0)$ hyperbolique X , nous verrons plus bas comment obtenir, sous certaines hypothèses, des plongements équivariants de X dans des complexes de Davis de groupes de Coxeter à angles droits. Or un groupe de Coxeter à angles droits admet lui-même un plongement dans un produit fini d'arbres, qui est équivariant sous un plongement du groupe de Coxeter dans un produit fini de groupes de Coxeter libres.

Généralisons la notion d'inversion considérée dans la théorie de Bass-Serre :

Définition 10.20. Soit X un complexe cubique $CAT(0)$ quelconque, soit f un automorphisme de X et soit m un hyperplan de X . Nous disons que f admet une inversion en m si f échange les deux demi-espaces délimités par m .

Alors si on se restreint au cas sans inversion, tout automorphisme d'un complexe cubique $CAT(0)$ est (combinatoirement) semi-simple :

Théorème 10.21 (voir [42]). Soit X un complexe cubique $CAT(0)$ quelconque et soit f un automorphisme de X dont aucune puissance n'admet une inversion. Alors ou bien f a un point fixe, ou bien f préserve une géodésique combinatoire sur laquelle f atteint sa distance de translation combinatoire (le minimum $\delta(f)$ des $d_{\text{comb}}(x, f(x))$ pour $x \in X^0$). De plus $\delta(f^m) = m\delta(f)$.

Ce théorème est surtout intéressant lorsque X n'est pas de dimension finie, puisque dans ce cas la semi-simplicité $CAT(0)$ est en défaut.

Notons qu'on peut toujours supprimer toutes les inversions d'un automorphisme donné en considérant la première subdivision cubique.

Corollaire 10.22. Supposons qu'un groupe Γ agisse proprement sur un complexe cubique $CAT(0)$. Alors les sous-groupes cycliques de Γ ne sont pas distordus.

Exemple 10.23. Les groupes de Baumslag-Solitar $BS(m, n)$ (avec $m \neq n$), ou le groupe d'Heisenberg (discret) n'admettent aucune action propre sur un espace à murs discret. Pourtant ces groupes ont la propriété de Haagerup, donc ils agissent proprement sur un espace à murs mesuré.

Définition 10.24 (groupes cubique). Soit Γ un groupe (de type fini). Nous dirons que Γ est cubique s'il admet une action fidèle propre cocompacte sur un complexe cubique $CAT(0)$.

Pour les groupes hyperboliques, être cubique est un invariant de commensurabilité :

Théorème 10.25. [cf. [43]] *Soit Γ un groupe cubique et Gromov-hyperbolique. Alors tout groupe Γ' commensurable avec Γ est cubique.*

11. ACTIONS SPÉCIALES SUR UN COMPLEXE CUBIQUE $CAT(0)$.

Dans toute cette section, X est un complexe cubique $CAT(0)$ et Γ est un groupe d'automorphismes de X .

Avec Dani Wise, nous avons considéré divers types de complexité pour l'action de Γ sur X .

Définition 11.1 (cf. [47]). Soit w un hyperplan de X . Nous disons que Γ a une auto-intersection en w s'il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma w \cap w \neq \emptyset$ et $\gamma w \neq w$ (autrement dit γm et m se coupent, en notant m le mur correspondant à l'hyperplan w). Nous disons que Γ a une auto-tangence en w s'il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que γw et w sont tangents.

Soit w, w' deux hyperplans tels que $w \cap w' \neq \emptyset$. Nous disons que Γ a une inter-tangence en (w, w') s'il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma w'$ et w sont tangents.

Les notions précédentes ont également un sens pour un groupe Γ agissant sur un espace à murs. Lorsque l'une des propriétés ci-dessus (auto-intersection, auto-tangence ou inter-tangence) a lieu pour l'action de Γ sur un espace à murs (X, \mathcal{M}) alors elle a lieu pour l'action correspondante de Γ sur le complexe cubique $CAT(0)$ associé $\text{Cub}(X, \mathcal{M})$.

Nous disons que l'action de Γ sur X est *spéciale* si Γ n'a pas d'auto-intersection, pas d'auto-tangence et pas d'inter-tangence. Nous disons que l'action est *virtuellement spéciale* si Γ a un sous-groupe d'indice fini qui agit spécialement.

Exemple 11.2. Un groupe de Coxeter à angles droits agit spécialement sur son complexe de Davis.

Remarque 11.3. Notons que lorsque Γ agit sans point fixe sur un complexe cubique $CAT(0)$ le quotient X est un complexe cubique à courbure ≤ 0 : alors le fait que l'action de Γ est spéciale correspond à certaines propriétés sur les hyperplans de X (définis comme les projetés des hyperplans du revêtement universel).

A tout groupe Γ agissant sur un complexe cubique $CAT(0)$ X , nous pouvons associer un système de Coxeter à angles droits $(W(\Gamma, X), S(\Gamma, X))$ de la façon suivante. Pour chaque hyperplan w de X , nous notons $[w]$ l'orbite de w sous Γ : soit alors $S(\Gamma, X) = \{s_{[w]}, w \text{ un hyperplan de } X\}$ un ensemble en bijection avec l'ensemble des orbites de Γ dans l'ensemble de tous les hyperplans de X . En plus des relations d'involution $(s_{[w]})^2 = 1$, imposons une relation de commutation $s_{[w]}s_{[w']} = s_{[w']}s_{[w]}$ si et seulement s'il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que γw coupe w' .

Lemme 11.4. *Il existe une et une seule application $c : X^0 \times X^0 \rightarrow W(\Gamma, X)$ telle que :*

- (1) *pour trois sommets quelconques x, y, z de X , on a $c(x, y) = c(x, z)c(z, y)$;*
- (2) *pour deux sommets x, y adjacents de X séparés par l'hyperplan w , on a $c(x, y) = s_{[w]}$;*

(3) pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $(x, y) \in X^0 \times X^0$, on a $c(\gamma x, \gamma y) = c(x, y)$.

Pour x_0 fixé, l'application $\phi_{x_0} : \Gamma \rightarrow W(\Gamma, X)$ envoyant γ sur $c(x_0, \gamma x_0)$ est un morphisme de groupes. Et l'application $c_{x_0} : X^0 \rightarrow W(\Gamma, X)$ envoyant x sur $c(x_0, x)$ s'étend en une application simpliciale $f_{x_0} : X^1 \rightarrow \mathfrak{Z}(W(\Gamma, X), S(\Gamma, X))$ qui est ϕ_{x_0} -équivariante.

L'intérêt des actions spéciales vient du résultat suivant :

Théorème 11.5 (cf. [47]). *L'action de Γ sur X est spéciale si et seulement si l'application $f_{x_0} : X^1 \rightarrow \mathfrak{Z}(W(\Gamma, X), S(\Gamma, X))$ s'étend en un plongement isométrique ϕ_{x_0} -équivariant $f_{x_0} : X \rightarrow \mathfrak{Z}(W(\Gamma, X), S(\Gamma, X))$.*

Les groupes de Coxeter à angles droits de type fini sont linéaires sur \mathbb{Z} (la représentation de Tits est fidèle, à coefficients entiers, voir [8]). En combinant ce fait avec le Théorème 6.2, nous déduisons du théorème de plongement précédent :

Théorème 11.6 (cf. [47]). *Soit Γ un groupe d'automorphismes discret, cocompact et spécial d'un complexe cubique $CAT(0)$. Alors Γ est convexe cocompact dans un groupe de Coxeter à angles droits. En particulier Γ est linéaire (sur \mathbb{Z}) et tous ses sous-groupes combinatoirement quasi-convexes sont des rétracts virtuels - donc sont séparables.*

Pour les groupes cubiques hyperboliques, nous obtenons même une caractérisation :

Théorème 11.7. [cf. [47]] *Soit Γ un groupe discret cocompact de X , un complexe cubique $CAT(0)$. Supposons que Γ est Gromov-hyperbolique. Alors l'action de Γ sur X est virtuellement spéciale si et seulement si tous les sous-groupes quasi-convexes de Γ sont séparables. En particulier, si tous les sous-groupes quasi-convexes d'un groupe cubique hyperbolique Γ sont séparables, alors Γ est linéaire sur \mathbb{Z} .*

Ainsi, pour les groupes cubiques, le problème de trouver un groupe hyperbolique possédant un sous-groupe quasi-convexe non séparable revient à trouver un groupe agissant discrètement cocompactement mais non virtuellement spécialement sur un certain complexe cubique $CAT(0)$. Par exemple, un groupe hyperbolique cubique non linéaire doit posséder un sous-groupe quasi-convexe non séparable.

Notons que d'après le théorème ci-dessus, le fait pour un groupe hyperbolique cubique d'admettre une action discrète cocompacte virtuellement spéciale entraîne que toutes les actions discrètes cocompactes sont virtuellement spéciales : lorsque cela se produit nous dirons que le groupe hyperbolique cubique est *virtuellement spécial*. Pour le moment, et pour les groupes cubiques non nécessairement hyperboliques, il n'est pas clair que le fait d'être virtuellement spécial ne dépende pas de l'action considérée.

Soit Γ un groupe discret cocompact d'automorphismes d'un complexe cubique $CAT(0)$. Soient $\Lambda, \Lambda', \Gamma'$ des sous groupes de Γ , avec Γ' d'indice fini dans Γ , $\Lambda' = \Lambda \cap \Gamma'$ et Λ combinatoirement quasi-convexe. Alors Λ' est combinatoirement quasi-convexe, et la séparabilité de Λ dans Γ équivaut à la séparabilité de Λ' dans Γ' . Donc d'après le théorème 11.6, tous les sous-groupes combinatoirement quasi-convexes d'un groupe agissant virtuellement spécialement sur un complexe carré $CAT(0)$ sont séparables. Nous en déduisons :

Théorème 11.8. [cf. [40], theorem 1.10] Soit Γ un groupe agissant sur un complexe carré $CAT(0)$. Soit d'autre part $1 \rightarrow F \rightarrow \bar{\Gamma} \rightarrow \Gamma \rightarrow 1$ une suite exacte où F est fini.

Si l'action de Γ sur X est virtuellement spéciale, alors un sous-groupe d'indice fini de $\bar{\Gamma}$ intersecte trivialement F , et donc $\bar{\Gamma}$ est commensurable à Γ .

Question 11.9. Le théorème précédent reste-t-il valable pour des actions virtuellement spéciales en dimension supérieure ? Les extensions des groupes de Coxeter à angles droits par des groupes finis sont-elles virtuellement triviales ?

Question 11.10. Existe-t-il des groupes hyperboliques cubiques non virtuellement spéciaux ?

La réponse à cette question est très probablement positive, bien que pour le moment aucun exemple ne soit connu. Signalons que sans la condition “hyperbolique”, la réponse est connue et assez facile. Par exemple un réseau uniforme d'un produit de deux arbres localement finis est virtuellement spécial si et seulement s'il est réductible, c'est-à-dire possède un sous-groupe d'indice fini qui est un produit de réseaux uniformes des facteurs. Or il existe des réseaux irréductibles dans de nombreux produits de deux arbres (voir par exemple [13] et [78]).

Il est possible que des méthodes aléatoires à la Gromov permettent de répondre à la question ci-dessus.

Exemple 11.11 (complexes carrés aléatoires). Soit $\mathcal{C}_{n,m}$ l'ensemble des complexes carrés ayant deux sommets (notés x_-, x_+), n arêtes et m carrés. Si on étiquette les arêtes orientées allant du sommet $-$ au sommet $+$ par a_1, \dots, a_n , on recolle un carré par son bord le long d'un chemin du type $(a_{i_1}, (a_{i_2})^{-1}, a_{i_3}, (a_{i_4})^{-1})$. Noter que le link d'un sommet x_ε dans un complexe X de $\mathcal{C}_{n,m}$ est un graphe d'ensemble de sommets $\{a_1, \dots, a_n\}$

Le problème est d'abord de compter le nombre de complexes dans $\mathcal{C}_{n,m}$ qui sont à courbure ≤ 0 et de groupe fondamental hyperbolique. Ensuite d'estimer le nombre de ces complexes qui de plus sont virtuellement spéciaux. On pense à n fixé très grand, m éventuellement variable.

On peut rajouter un paramètre pour encadrer cette construction. Soit L^-, L^+ deux graphes d'ensemble des sommets $\{a_1, \dots, a_n\}$. Soit alors $\mathcal{C}_{n,m;L^-,L^+}$ l'ensemble des complexes carrés X de $\mathcal{C}_{n,m}$ tel que le link de X en x_- est contenu dans L^- , et le link de X en x_+ est contenu dans L^+ .

Par exemple si les mailles de L^- et L^+ sont ≥ 4 (resp. 5) alors tous les complexes de $\mathcal{C}_{n,m;L^-,L^+}$ sont à courbure ≤ 0 (resp. ≤ -1).

Si L^-, L^+ sont bipartites de maille ≥ 5 , un résultat remarquable de D. Wise (cf. [79]) assure que tous les complexes de $\mathcal{C}_{n,m;L^-,L^+}$ sont virtuellement spéciaux.

La fréquence des complexes X dans $\mathcal{C}_{n,m;L^-,L^+}$ qui n'ont qu'un seul hyperplan (ayant donc beaucoup d'autointersections) est très élevée, mais il se pourrait qu'en passant à un revêtement fini convenable ce phénomène disparaisse.

Donnons maintenant un critère plus algorithmique que celui du Théorème 11.7 assurant qu'une action est spéciale. Rappelons que la topologie profinie sur un groupe Γ est

celle dont les fermés sont les intersections de classes modulo les sous-groupes d'indice fini.

Théorème 11.12. *Soit Γ un réseau uniforme de X , un complexe cubique $CAT(0)$.*

Supposons que l'action de Γ soit virtuellement spéciale. Alors pour tout hyperplan h de X , le stabilisateur Γ_h est un sous-groupe séparable. Pour toute paire d'hyperplans h_1, h_2 qui s'intersectent dans X , la double classe $\Gamma_{h_1}\Gamma_{h_2}$ est fermée dans la topologie profinie.

Réciproquement, supposons que pour tout hyperplan h de X le stabilisateur Γ_h est un sous-groupe séparable, et pour toute paire d'hyperplans h_1, h_2 qui s'intersectent dans X , la double classe $\Gamma_{h_1}\Gamma_{h_2}$ est fermée dans la topologie profinie. Alors Γ possède un sous-groupe d'indice fini dont l'action est spéciale.

Donnons maintenant quelques applications de ce critère.

Théorème 11.13. *[cf. [48]] Les groupes de Coxeter de type fini sont virtuellement spéciaux. En particulier les sous-groupes quasi-convexes des groupes de Coxeter hyperboliques sont des rétracts virtuels - donc sont séparables.*

Notons que ceci est une généralisation importante du théorème 6.2, qui lui-même recouvrait la plupart des résultats de séparabilité connus pour les groupes de Coxeter à angles droits (voir notamment [70], [1]).

Théorème 11.14. *[cf. [47] et [5]] Les réseaux uniformes arithmétiques de type simple de \mathbb{H}^n sont cubiques et virtuellement spéciaux.*

(Pour nous, un réseau arithmétique de type simple est le groupe des points entiers d'une forme quadratique de signature $(n, 1)$ à coefficients dans une certaine extension finie réelle de \mathbb{Q} .)

Donnons quelques conséquences du Théorème 11.14. Le seul fait que pour tout $n \geq 1$ l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n admette un réseau uniforme arithmétique de type simple (par les constructions arithmétique classiques, cf. [59]) entraîne :

Théorème 11.15. *L'espace hyperbolique réel de dimension n est quasi-isométrique à un complexe cubique $CAT(0)$ uniformément localement fini. Tout groupe hyperbolique est quasi-isométrique à un complexe cubique $CAT(0)$ uniformément localement fini, donc se plonge quasi-isométriquement dans un produit fini d'arbres.*

La dernière assertion découle du résultat de quasi-isométrie en utilisant la Proposition 10.18. C'est un théorème que Buyalo et Schroeder avaient déjà obtenu par d'autres méthodes (cf [14]).

Question 11.16. *Quels groupes / espaces sont quasi-isométriques à des complexes cubiques $CAT(0)$?*

En utilisant les rétractions virtuelles sur les sous-groupes quasi-convexes, nous démontrons dans certains cas des conjectures proposées par Nicolas Bergeron (cf. [4]) sur l'homologie et la cohomologie virtuelle des variétés arithmétiques :

Théorème 11.17. [cf. [5]] *Soit M^n une variété compacte, hyperbolique, arithmétique de type simple (autrement dit M^n est le quotient de \mathbb{H}^n par un réseau uniforme arithmétique de type simple sans torsion). Soit $N^k \rightarrow M^n$ une immersion isométrique. Alors il existe un revêtement fini $\bar{M}^n \rightarrow M^n$ tel que $N^k \rightarrow M^n$ se relève en un plongement isométrique $N^k \rightarrow \bar{M}^n$ qui induise une injection en homologie et une surjection en cohomologie.*

Probablement les deux classes précédentes de groupes (virtuellement) spéciaux (groupes de Coxeter et réseaux uniformes arithmétiques de type simple) sont des cas particuliers d'un théorème général sur les sous-groupes discrets $\Gamma < SO(p, q)$ qui préservent certaines familles localement finies d'hyperplans.

Pour obtenir de très fortes propriétés algébriques sur un groupe cubique, il suffit donc de montrer que ce groupe est *cubique spécial*, au sens où il admet une action géométrique et spéciale sur un complexe cubique $CAT(0)$. Les groupes cubiques spéciaux sont en particulier linéaires sur \mathbb{Z} , séparables sur leurs sous-groupes combinatoirement quasi-convexes, mais aussi indicable (si infinis) et même larges (si hyperboliques non élémentaires). Il semble donc important de déterminer si un groupe donné est cubique spécial : il y a peut-être beaucoup d'autres exemples au delà des groupes de Coxeter et des réseaux arithmétiques hyperboliques de type simple. Par exemple :

Question 11.18. Quels groupes d'Artin sont cubiques spéciaux ?

D'autre part tout résultat sur les groupes convexes-cocompacts des groupes de Coxeter à angles droits s'applique aux groupes cubiques spéciaux, donc il semble également important d'étudier systématiquement les sous-groupes des groupes de Coxeter (à angles droits).

Dans cette direction, nous avons obtenu avec Pierre-Emmanuel Caprace le résultat suivant :

Théorème 11.19 (cf. [15]). *Soit (W, S) un système de Coxeter et soit Γ un sous-groupe de W préservant une partie combinatoirement convexe X du complexe de Davis $\mathfrak{Z}(W, S)$, de sorte que $\Gamma \backslash X$ est fini. Si X contient une partie quasi-isométrique à \mathbb{R}^n , alors Γ contient \mathbb{Z}^n .*

Ceci permet de résoudre pour les groupes cubiques spéciaux le problème de Gromov sur le lien entre l'absence de \mathbb{Z}^2 et l'hyperbolicité :

Corollaire 11.20. *Soit Γ un groupe cubique spécial. Alors Γ est hyperbolique si et seulement si Γ ne contient pas \mathbb{Z}^2 .*

12. ESPACES À MURS MESURÉS, ESPACES MÉDIANS.

Dans [21], Chérix, Martin et Valette ont introduit une généralisation naturelle des espaces à murs (discrets) :

Définition 12.1. Soit X un ensemble. Une structure d'espace à murs mesurés sur X est la donnée

- (1) d'un ensemble \mathcal{M} de murs de X
- (2) d'une σ -algèbre \mathcal{B} sur \mathcal{M}
- (3) et d'une mesure μ sur \mathcal{B} telle que pour deux points quelconques $x, y \in X$ on a $\mathcal{M}(x|y) \in \mathcal{B}$ et $\mu(\mathcal{M}(x|y)) < +\infty$

Alors la formule $d(x, y) = \mu(\mathcal{M}(x|y))$ définit une pseudo-distance sur X , dite *distance de mur*.

Exemple 12.2 (L'espace hyperbolique réel). Il existe sur l'ensemble des demi-espaces (ouverts ou fermés) de l'espace hyperbolique réel \mathbb{H}^n une mesure $SO(n, 1)$ -invariante. La distance de murs associée est un multiple de la distance hyperbolique (cf. [21]).

Ainsi les espaces à murs mesurés donnent une version continue des espaces à murs discrets. Introduisons maintenant une version continue des complexes cubiques $CAT(0)$.

Définition 12.3. Soit (X, d) un espace métrique. L'*intervalle entre deux points* a, b de X est l'ensemble $I(a, b) = \{x \in X, d(a, x) + d(x, b) = d(a, b)\}$. L'espace métrique (X, d) est dit *médian* si pour trois points quelconques a, b, c de X l'intersection $I(a, b) \cap I(b, c) \cap I(a, c)$ contient un et un seul point (alors appelé le *médian de a, b, c* , et noté $m(a, b, c)$).

Une partie $Y \subset X$ est dite *convexe* si pour a, b quelconques dans Y on a $I(a, b) \subset Y$.

L'*enveloppe convexe* d'une partie $Y \subset X$ est l'intersection des parties convexes contenant Y . Si on suppose (X, d) médian on peut aussi définir l'*enveloppe médiane* de Y : c'est l'intersection des parties médianes de X qui contiennent Y .

Dans les années 1970 est apparue la notion de graphe médian (cf. [55], [54]). Leur étude s'est poursuivie tout au long des années 1970 et 1980, sans toutefois intéresser véritablement les géomètres : ce n'est que vers la fin des années 1980 que la notion d'espace métrique médian apparaît en tant qu'objet isolé d'étude, mais le cas discret reste majoritairement considéré (voir par exemple [32] et [65]). Dans [19] Chepoi a montré un lien essentiel avec la géométrie à la Gromov : les graphes médians sont exactement les 1-squelettes de complexes cubiques $CAT(0)$.

Dans un travail récent avec I. Chatterji et C. Druţu (voir [17]), nous entamons une étude des espaces métriques médians généraux. Pour donner une idée des propriétés géométriques remarquables des espaces médians, introduisons d'abord une définition :

Définition 12.4. Soit (X, d) un espace métrique, soit $a \in X$ un point et $B \subset X$ une partie. Notons $I(a, B)$ l'intersection des intervalles $I(a, b)$, lorsque b décrit B (par exemple $a \in I(a, B)$). Une *L_1 -projection de a sur B* est un point de $B \cap I(a, B)$. Par inégalité triangulaire il existe toujours au plus une L_1 -projection de a sur B .

Une partie $B \subset X$ est dite *L_1 -convexe* si tout point a de X admet une L_1 -projection sur B , autrement dit si pour tout $a \in X$ il existe $p \in B$ tel que pour tout $b \in B$ on a $d(a, b) = d(a, p) + d(p, b)$. Lorsque B est L_1 -convexe, il existe donc une L_1 -projection $X \rightarrow B$.

Il est facile de vérifier que L_1 -convexe entraîne convexe et fermé, avec une L_1 -projection 1-Lipschitzienne. Réciproquement :

Proposition 12.5. *Dans un espace métrique médian, tout convexe fermé est L_1 -convexe, et tout intervalle est L_1 -convexe : la L_1 -projection sur $I(a, b)$ est justement l'application $x \mapsto m(a, b, x)$.*

Nous montrons qu'il existe une certaine dualité entre espaces à murs mesurés et espaces métriques médians. Tout d'abord la construction de complexe cubique $CAT(0)$ associé à un espace à murs discret se généralise sans difficulté :

Théorème 12.6. *Soit $(X, \mathcal{M}, \mathcal{B}, \mu)$ un espace à murs mesurés. Alors il existe un espace métrique médian $M = M(X, \mathcal{M}, \mathcal{B}, \mu)$ et une isométrie $X \rightarrow M$ avec les propriétés suivantes :*

- (1) *l'enveloppe médiane de l'image de X dans M est dense ;*
- (2) *tout automorphisme de $(X, \mathcal{M}, \mathcal{B}, \mu)$ s'étend en un automorphisme de M .*

De façon peut-être plus surprenante, les espaces médians généraux ont des murs convexes mesurés :

Théorème 12.7. *Soit (X, d) un espace métrique médian. Alors l'ensemble \mathcal{H} des parties convexes dans X dont le complémentaire est également convexe dans X est non vide ; soit \mathcal{M} l'ensemble des murs correspondant. Il existe sur la σ -algèbre \mathcal{B} engendrée par les parties $\mathcal{M}(x|y)$ une mesure σ -additive μ telle que pour deux points quelconques x, y de X , on a $d(x, y) = \mu(\mathcal{M}(x|y))$. En particulier la distance d est une distance de murs.*

Les propriétés (T) et anti-(T) pour les groupes localement compacts avec une partie dénombrable dense peuvent s'exprimer en terme d'actions sur des espaces de Hilbert affines. Nous obtenons une formulation équivalente en terme d'actions sur des espaces médians :

Théorème 12.8. *Soit G un groupe localement compact avec une partie dénombrable dense. Alors G a la propriété de Haagerup (anti-(T)) si et seulement si G admet une action propre par isométries sur un espace médian. Et G a la propriété de (T) de Kazhdan si et seulement si toute action de G par isométries sur un espace médian admet une orbite bornée.*

Par exemple :

Corollaire 12.9. *Le groupe $SU(n, 1)$ des isométries de l'espace hyperbolique complexe $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ agit proprement par isométries sur un espace médian. Il admet une structure d'espace à murs mesurés invariante dont la pseudo-métrique de murs est propre (les boules sont relativement compactes).*

Notons qu'à l'heure actuelle aucune structure d'espace à murs mesurés invariante sur $SU(n, 1)$ n'a été construite explicitement. Personne n'a pu définir des murs géométriques dans $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ avec une mesure $SU(n, 1)$ -invariante, de sorte qu'on récupère une structure d'espace à murs mesurés invariante sur $SU(n, 1)$. Même pour le groupe d'Heisenberg (cocompact sur une horosphère de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$) il n'existe pas de belle structure d'espace à murs

mesurés. Peut-être est-ce dans la nature des choses : il est fort possible que $SU(n, 1)$ n'admette aucune action propre sur un espace à murs mesurés $(X, \mathcal{M}, \mathcal{B}, \mu)$ qui soit transitive sur les murs.

Dans le cas de l'espace hyperbolique réel muni de sa structure naturelle d'espace à murs mesurés l'espace médian associé reste à distance de Hausdorff finie :

Théorème 12.10. *Munissons \mathbb{H}^n de sa structure naturelle d'espace à murs mesurés (cf. Exemple 12.2). Soit $\mathbb{H}^n \rightarrow M$ le plongement isométrique dans un espace métrique médian associé à cette structure comme dans le Théorème 12.7. Alors \mathbb{H}^n est un sous-espace totalement géodésique de M à distance de Hausdorff finie de M et $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ agit proprement par isométrie sur M avec quotient borné.*

Pour l'espace hyperbolique complexe rappelons que les résultats de Delzant et Gromov impliquent en particulier que les réseaux uniformes de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ ne sont pas cubiques (voir [28]). De même, il se pourrait que $SU(n, 1)$ n'agisse jamais par isométrie de façon propre et cocompacte sur un espace médian.

L'étude précise des espaces médians et de leurs groupes d'isométrie reste à faire. Naturellement comme les espaces médians contiennent les espaces L^1 pour pouvoir espérer dégager des propriétés géométriques intéressantes, il faut se restreindre aux actions propres et (tout d'abord) cocompactes.

Définition 12.11. Soit G un groupe localement compact. Nous dirons que G est médian si G est un groupe d'isométries propre cocompact d'un espace médian localement compact (X, d) .

Nous donnons ci-dessous une liste de questions naturelles concernant les groupes agissant sur les espaces médians.

Questions 12.12.

Quels groupes de Lie sont médians ?

Si Γ est un réseau uniforme d'un groupe localement compact G , est-ce que G est médian si et seulement si Γ médian ?

Soit Γ un groupe de présentation finie. À quelle condition l'hypothèse que Γ est médian implique-t-elle que Γ est cubique ?

Peut-on définir, pour une action par isométries d'un groupe sur un espace médian, le fait d'être spéciale, de façon à étendre le cas discret ?

Soit G un groupe localement compact fixé. Que dire du cône convexe des actions propres par isométries de G sur un espace médian ?

Partie 4. Géométrie combinatoire de certains complexes simpliciaux.

13. DISTANCE COMBINATOIRE, BOULES, HYPOTHÈSES DE CONVEXITÉ.

Dans toute cette section, X désigne un complexe simplicial. Pour x, y deux sommets de X , nous notons $d(x, y)$ la distance combinatoire entre x et y dans le 1-squelette X^1 . Une géodésique combinatoire est donc une suite de sommets (x_0, \dots, x_n) tels que $n = d(x_0, x_n)$ et x_i, x_{i+1} sont liés par une arête.

Pour tout sommet x , nous notons $B_0(x) = \{x\}$ et nous définissons par récurrence $B_{n+1}(x)$ comme l'union des simplexes σ de X tels que $\sigma \cap B_n(x) \neq \emptyset$. Nous appelons $B_n(x)$ la *boule (combinatoire) de centre x et de rayon n* . Puis pour tout sous-complexe $Y \subset X$, soit $B_n(Y)$ l'union des boules $B_n(x)$ pour x un sommet de Y . Notons que $B_n(Y)$ n'est pas nécessairement un sous-complexe plein.

Par exemple, l'étoile d'un sommet x dans X est simplement la boule $B_1(x)$. Or l'étoile de tous les sommets est pleine si et seulement si X est de drapeau. Comme seule la distance combinatoire nous importe, nous pouvons remplacer X par le complexe simplicial de drapeaux \bar{X} ayant le même 1-squelette : le plongement $X \rightarrow \bar{X}$ est une isométrie pour les métriques combinatoires.

A partir de maintenant, nous supposons donc que X est de drapeau (de sorte que les boules $B_1(x)$ sont toujours pleines). Notre but est de trouver des conditions combinatoires sur X qui impliquent un comportement analogue à celui des espaces à courbure ≤ 0 (ou même ≤ -1). Par exemple, la courbure ≤ 0 est une notion locale qui entraîne la contractilité du revêtement universel. Notons à ce propos que la condition “ X de drapeau” empêche la présence de petites sphères (bord de simplexes).

Un phénomène typique de la courbure ≤ 0 est la convexité de la distance sur le revêtement universel, qui entraîne par exemple la convexité des boules et de nombreux autres phénomènes de convexité.

Définition 13.1 (parties convexes). Soit $Y \subset X$ un sous-complexe. Nous dirons que Y est convexe dans X si Y est plein et si toute géodésique de X dont les extrémités sont dans Y a tous ses sommets dans Y .

Plus généralement nous dirons que Y est n -convexe dans X si Y est plein et toute géodésique de X de longueur $\leq n$ dont les extrémités sont dans Y a tous ses sommets dans Y .

Introduisons des conditions naturelles de convexité locale pour un complexe simplicial (de drapeau) X :

- (1) (I_{11}) : pour x, y deux sommets dans X avec $d(x, y) = 2$ l'intersection des étoiles de x et y est un simplexe,
- (2) (I_{12}) : pour x un sommet et a une arête dans X avec $x \notin B_1(a)$ l'intersection de l'étoile de x et de la boule $B_1(a)$ est vide ou un simplexe,
- (3) (I_{22}) : pour a, b deux arêtes dans X avec $b \cap B_1(a) = \emptyset$ l'intersection $B_1(a) \cap B_1(b)$ est vide ou un simplexe.

En termes de convexité, on a les interprétations suivantes (toujours en supposant X de drapeau) : (I_{11}) signifie que les boules $B_1(x)$ sont convexes, $(I_{11}) + (I_{12})$ signifie que les boules $B_1(x)$ sont convexes et les boules $B_1(a)$ sont 2-convexes, enfin $(I_{11}) + (I_{12}) + (I_{22})$ signifie que les boules $B_1(x)$ sont convexes et les boules $B_1(a)$ sont convexes.

Définition 13.2. Un complexe simplicial X de drapeau satisfaisant (I_{11}) et (I_{12}) est dit à $K_{\text{comb}} \leq 0$ (lu : combinatoirement à courbure ≤ 0). Un complexe simplicial X de drapeau satisfaisant $(I_{11}), (I_{12})$ et (I_{22}) est dit à $K_{\text{comb}} < 0$ (lu : combinatoirement à courbure < 0).

Nous dirons qu'un groupe Γ est à $K_{\text{comb}} \leq 0$ (resp. à $K_{\text{comb}} < 0$) s'il agit discrètement cocompactement sur un complexe simplicial simplement connexe à $K_{\text{comb}} \leq 0$ (resp. à $K_{\text{comb}} < 0$).

Notons que tout sous-complexe plein d'un complexe à $K_{\text{comb}} \leq 0$ (ou à $K_{\text{comb}} < 0$) est lui-même à $K_{\text{comb}} \leq 0$ (ou à $K_{\text{comb}} < 0$). Il est facile de voir qu'un complexe simplicial de dimension 2 est à $K_{\text{comb}} \leq 0$ (ou à $K_{\text{comb}} < 0$) si et seulement s'il est $CAT(0)$ (resp. $CAT(-1)$) pour une métrique régulière à courbure $K = 0$ (resp. $K = -1$) sur les triangles. Ainsi il existe de très nombreux groupes à $K_{\text{comb}} \leq 0$ (resp. à $K_{\text{comb}} < 0$) en dimension 2, y compris ayant la propriété (T) . Dans des notes non publiées, Wise a fait remarquer que les groupes à petite simplification $C(6)$ sont à $K_{\text{comb}} \leq 0$, et que les groupes à petite simplification $C'(\frac{1}{6})$ sont à $K_{\text{comb}} < 0$.

Cependant l'intérêt de la notion $K_{\text{comb}} < 0$ est qu'elle fournit des exemples en dimension arbitrairement grande.

L'énoncé suivant résume les premières propriétés de la courbure combinatoire ≤ 0 :

Théorème 13.3. (voir [39]) *Soit X un complexe de drapeau connexe. Alors le revêtement universel \tilde{X} est de drapeau, et \tilde{X} est à $K_{\text{comb}} \leq 0$ (resp. à $K_{\text{comb}} < 0$) si et seulement si les links des sommets de X sont à $K_{\text{comb}} \leq 0$ (resp. à $K_{\text{comb}} < 0$). De plus si \tilde{X} est à $K_{\text{comb}} \leq 0$ alors \tilde{X} est contractile. Si \tilde{X} est à $K_{\text{comb}} < 0$ alors les bigones géodésiques de $(\tilde{X})^1$ sont 1-fins, donc la distance combinatoire sur le 1-squelette est Gromov-hyperbolique (voir [60]).*

Ainsi les groupes à $K_{\text{comb}} < 0$ sont Gromov-hyperboliques.

En considérant un n -simplexe de groupes finis à $K_{\text{comb}} < 0$ dont les développements locaux sont ultra-pavables (i.e. qui peuvent être pavés par chaque sous-complexe $B_1(\sigma)$ (pour σ un simplexe quelconque), on obtient un groupe fondamental à $K_{\text{comb}} < 0$ résiduellement fini. Un quotient compact régulier convenable du revêtement universel du simplexe est encore à $K_{\text{comb}} < 0$, et peut servir de modèle local pour le développement d'un $(n+1)$ -simplexe de groupes finis à $K_{\text{comb}} < 0$ admettant à nouveau des développements locaux ultra-pavables. Par cette méthode, on peut construire des groupes hyperboliques résiduellement finis de dimension cohomologique virtuelle arbitrairement grande, agissant sur des complexes simplement connexes à $K_{\text{comb}} < 0$. D'autre part cette construction fournit des complexes compacts X^n à $K_{\text{comb}} < 0$ de dimension n arbitrairement grande admettant une classe fondamentale (mod. 2) en dimension n : on peut alors considérer

le système de Coxeter à angles droits dont le nerf fini est X^n , et donc de dimension cohomologique virtuelle n arbitrairement grande. Lorsque X^n est sans carré (c'est toujours possible), le groupe de Coxeter à angles droits associé est Gromov-hyperbolique. Ainsi il existe des groupes de Coxeter à angles droits Gromov-hyperboliques de dimension cohomologique virtuelle arbitrairement grande (voir aussi [50]).

Ces résultats ont été obtenus indépendamment et simultanément par T. Januszkiewicz et J. Świątkowski. Dans leur article [51] ils obtiennent à peu près tous les résultats présents dans [39], et beaucoup d'autres aussi. Pour cette raison, nous n'avons pas jugé nécessaire de publier notre travail.

14. SÉPARABILITÉ DES SOUS-GROUPES QUASI-CONVEXES DANS CERTAINS GROUPES À $K_{\text{comb}} < 0$.

Dans [46] nous avons démontré, avec J. Świątkowski, un analogue dans les espaces à $K_{\text{comb}} < 0$ du phénomène déjà observé dans les complexes cubiques $CAT(0)$:

Lemme 14.1. *Soit X un complexe simplicial simplement connexe à $K_{\text{comb}} < 0$ et soit $Y \subset X^0$ une partie quasi-convexe. Alors il existe un entier $k \geq 0$ tel que $B_k(Y)$ est (combinatoirement) convexe dans X*

En fait si Y est convexe, alors $B_1(Y)$ est fortement convexe en un sens proche de celui des complexes cubiques $CAT(0)$:

Définition 14.2. Soit X un complexe simplicial simplement connexe à $K_{\text{comb}} \leq 0$. Un sous-complexe Y de X est saillant s'il est plein et pour tout sommet x de X non intérieur à Y l'intersection $B_1(x) \cap Y$ est vide, un simplexe ou de la forme $B_1(\sigma) \cap B_1(x)$ pour σ un certain simplexe du link de x .

Une action d'un groupe G sur X est ultra-pavable si pour tout sous-complexe $Y \subset X$ saillant, il existe un sous-groupe $G_Y \subset G$ pour lequel Y est un domaine fondamental strict.

Notons que la famille d'exemples de groupes dont la description est esquissée à la fin de la partie précédente correspond à des actions géométriques ultra-pavables.

En adaptant la méthode de Scott, nous obtenons alors :

Théorème 14.3. (cf. [46]) *Soit X un complexe simplicial simplement connexe à $K_{\text{comb}} < 0$ et $G < \text{Aut}(X)$ un groupe discret cocompact dont l'action est ultra-pavable. Alors tous les sous-groupes quasi-convexes de G sont séparables.*

Les groupes à $K_{\text{comb}} < 0$ sont très particuliers (par exemple leur bord ne contient aucun disque \mathbb{D}^2). Cependant la relative flexibilité des constructions dans cette catégorie laisse espérer de nouveaux beaux exemples en théorie géométrique des groupes.

Partie 5. Travaux en cours et projets.

Dans cette partie nous montrons quelques pistes ouvertes dans les domaines abordés précédemment, et que nous aimerions explorer, ou éventuellement donner comme (embryon de) sujet de thèse. Nous donnons donc des résultats que nous voudrions obtenir. Sauf mention explicite du contraire, les énoncés n'ont pas encore de preuve complète - ou alors seulement dans des cas particuliers - et les hypothèses mêmes sous lesquelles ces résultats seront valables ne sont pas encore claires.

15. AU BORD DES COMPLEXES CUBIQUES $CAT(0)$.

Soit X un complexe cubique $CAT(0)$. Alors X admet toujours un *complexe cubique* $CAT(0)$ à l'infini, noté $\partial_{\text{cub}}X$, dont les sommets sont les familles σ de demi-espaces telles que :

- (1) si $a \in \sigma$ et $a \subset b$ alors $b \in \sigma$,
- (2) si a est un demi-espace alors $a \in \sigma$ ou $a^c \in \sigma$, mais on n'a pas $\{a, a^c\} \subset \sigma$,
- (3) la différence symétrique de σ avec l'ensemble des demi-espaces de X contenant un sommet fixé est infinie.

Il y a une arête entre deux sommets σ, σ' de $\partial_{\text{cub}}X$ lorsque la différence symétrique $\sigma \Delta \sigma'$ consiste en une paire de demi-espaces complémentaires.

Ce complexe $\partial_{\text{cub}}X$ est connu de plusieurs auteurs (dont au moins G. Niblo, M. Sageev, P.E. Caprace...), jusqu'à présent il n'a pas été particulièrement étudié ni utilisé. Les demi-espaces de X^0 définissent des demi-espaces $(\partial_{\text{cub}}X)^0$, mais on n'obtient pas une structure d'espace à murs au sens usuel, car deux sommets peuvent être séparés par un nombre infini de murs.

15.1. Barycentre combinatoire. Supposons par exemple X hyperbolique au sens de Gromov. Alors $\partial_{\text{cub}}X$ s'identifie au bord visuel de X . Ceci permet la construction suivante :

Proposition 15.1. *Soit μ une mesure borélienne sur le compact ∂X , telle que $\mu(O) > 0$ pour tout ouvert $O \subset \partial X$. Alors μ admet un barycentre combinatoire naturel, qui est un sommet de la première subdivision cubique X' de X .*

Avec Gilles Courtois nous nous demandons si ce barycentre pourrait intervenir dans des résultats de rigidité (à la Mostow). En effet un homéomorphisme $f : \partial X \rightarrow \partial Y$ entre les bords de deux complexes cubiques $CAT(0)$ hyperboliques induit une bijection entre mesures de probabilités chargeant tout ouvert. En poussant par f les mesures de Patterson-Sullivan combinatoires, puis en prenant le barycentre combinatoire, on obtient une application $X^0 \rightarrow (Y')^0$. Il manque encore une idée vraiment neuve pour retrouver dans ce cadre les résultats de rigidité à la Mostow obtenu par Marc Bourdon dans le cas des immeubles fuchsien à angles droits (cf. [9]).

Remarque 15.2. Le même type de barycentre peut être défini si l'espace de départ X est un espace à murs mesurés hyperbolique - dans ce cas le barycentre d'une probabilité sur le bord appartient à l'espace médian associé. De ce point de vue, l'espace médian associé à l'espace hyperbolique apparaît tout naturellement.

Cette idée de barycentre (combinatoire) d'une mesure positive de masse finie fournit également un procédé pour définir le ℓ_1 -(bary)centre d'une partie finie d'un complexe cubique $CAT(0)$. L'intérêt du ℓ_1 -centre, c'est qu'il est algorithmiquement déterminable, contrairement au centre métrique $CAT(0)$ usuellement considéré, par exemple chez Billera, Holmes et Vogtmann (voir [7]).

Nous espérons convaincre les biologistes de l'efficacité potentielle d'un algorithme de type ℓ_1 pour la recherche d'ancêtres communs à partir d'arbres phylogénétiques.

15.2. Structure conforme et birapport au bord. Supposons à nouveau X cubique $CAT(0)$, hyperbolique au sens de Gromov. Alors les ensemble limites de demi-espaces de X^0 définissent des demi-espaces fermés sur ∂X , d'où une structure d'espace à murs topologiques sur le compact ∂X . Les points à l'intérieur s'identifient à l'ensemble des demi-espaces qui les contiennent, et ces demi-espaces ont une trace au bord. Nous en déduisons donc :

Lemme 15.3. *Si un homéomorphisme du bord préserve l'ensemble des moitiés fermées du bord, alors il est l'extension au bord d'un automorphisme de X - pour peu que X soit essentiel en un sens convenable (tous les murs sont propres, et deux murs distincts sont à distance de Hausdorff infinie).*

La question est maintenant de trouver une condition pour qu'un homéomorphisme du bord préserve les demi-espaces fermés de ∂X .

En s'inspirant des travaux de M. Bourdon ([9]), il est naturel d'introduire un birapport combinatoire au bord. Pour a, b, c, d quatre points du bord, notons $m(a, b|c, d)$ le nombre de murs de ∂X séparant $\{a, b\}$ de $\{c, d\}$, puis pour $a \neq b, b \neq c, c \neq d, d \neq a$, définissons le *birapport combinatoire* (ou *birapport de murs*) $[a, b, c, d] \in \mathbb{Z}$ par la formule :

$$[a, b, c, d] = m(a, b|c, d) - m(a, d|b, c)$$

Proposition 15.4. *Si un homéomorphisme du bord préserve le birapport sur ∂X , alors il est l'extension au bord d'un automorphisme de X - au moins sous certaines hypothèses topologiques sur ∂X .*

L'idée est simplement de retrouver les demi-espaces fermés de ∂X à partir du birapport, comme dans le travail de Bourdon.

Ceci amène à explorer le problème suivant :

Problème 15.5. Soit $[\cdot, \cdot, \cdot, \cdot]$ une fonction "birapport" à valeur entière au bord d'un espace métrique hyperbolique Y . A quelles conditions ce birapport permet-il de définir des moitiés fermées sur ∂Y , de sorte que $[\cdot, \cdot, \cdot, \cdot]$ soit le birapport associé à cette structure d'espace à murs topologiques ?

Le birapport de murs a des symétries évidentes, qui sont les suivantes :

- (1) $[b, c, d, a] = -[a, b, c, d]$ (anti-invariance par permutation cyclique d'ordre 4) ;
- (2) $[a, d, c, b] = -[a, b, c, d]$ (anti-invariance par symétrie diagonale) ;
- (3) $[b, a, d, c] = [a, b, c, d]$ (invariance par symétrie médiane) ;
- (4) $[a, b, c, d] + [b, c, a, d] + [c, a, b, d] = 0$ (“triple rapport” nul).

Un birapport de murs possède une symétrie additionnelle, plus cachée. Pour cinq points a, b, c, d, e au bord deux à deux distincts on a :

$$(*) [a, b, c, d] = [a, b, e, d] + [e, b, c, d] (= [a, b, c, e] + [a, e, c, d])$$

Cette relation, ajoutée aux relations évidentes, caractérise t-elle les birapports de murs ?

Noter que le birapport usuel au bord de l'espace hyperbolique réel, dans sa forme additive, n'est rien d'autre qu'un birapport d'espace à murs mesurés (par la formule de Crofton), donc satisfait aussi (*).

On aimerait un résultat du type suivant :

Théorème 15.6. *Soit Γ un groupe hyperbolique dont l'action au bord préserve un birapport entier (ou plus généralement : discret) vérifiant (*). Si $\partial\Gamma$ a certaines propriétés topologiques, alors Γ est en fait cubique et le birapport est un birapport de murs.*

Combiné avec le théorème de Sageev sur les groupes de 3-variété agissant sur un complexe cubique $CAT(0)$ (cf. [69]), cela montrerait que certaines 3-variétés hyperboliques ont des surfaces essentielles immergées.

15.3. Espaces de Menger comme bord. Dans [30], Dymara et Osajda ont montré que le bord des immeubles hyperboliques à angles droits épais d'appartement un pavage de l'espace hyperbolique réel de dimension n est M^{n-1} , l'espace “de Menger” universel de dimension $n - 1$. En utilisant les produits graphés de groupes finis, ceci fournit des exemples de groupes hyperboliques de bord M^n . Cependant les pavages par polytopes à angles droits de \mathbb{H}^n n'existent que pour $n = 1, 2, 3, 4$ (voir [63]).

Avec Damian Osajda, nous nous demandons si l'on ne pourrait pas construire des complexes cubiques $CAT(0)$ contenant des copies de X_n , le complexe cubique $CAT(0)$ d'un réseau uniforme arithmétique de type simple de \mathbb{H}^n , avec une flexibilité suffisante pour que les arguments de Dymara et Osajda restent valables. Cela fournirait des groupes hyperboliques de bord M^{n-1} pour tout n . Pour le moment, nous avons déjà obtenu à profusion des groupes hyperboliques cubiques dont le bord est l'adhérence d'une union très “branchée” de sphères \mathbb{S}^{n-1} .

16. COMPLEXES CUBIQUES SPÉCIAUX : SUITE.

La notion de groupes cubiques spéciaux appelle naturellement divers types de résultats.

D'une part, il est très intéressant de montrer que telle vaste classe de groupes cubiques est en fait constituée de groupes virtuellement spéciaux, puisqu'être spécial a de très fortes conséquences algébriques.

D'autre part, on doit continuer à chercher les propriétés algébriques des sous-groupes convexes-cocompacts des groupes de Coxeter, puisqu'elles seront valables pour tous les groupes spéciaux.

Enfin, il serait également très intéressant de trouver un exemple cubique hyperbolique non virtuellement spécial. Cette recherche se fera cependant dans un autre état d'esprit : certes elle donnera un contre-exemple, et probablement immédiatement un exemple de groupe hyperbolique non-résiduellement fini, mais après tout cela ne serait qu'une confirmation de ce à quoi la plupart des chercheurs croient. De notre point de vue, ce qui est surprenant, ce n'est pas qu'il existe un groupe hyperbolique non résiduellement fini, c'est plutôt que tant de groupes cubiques hyperboliques soient virtuellement spéciaux. C'est pourquoi, pour le moment, nous pensons nous concentrer sur les résultats positifs qu'assure le fait d'être virtuellement spécial.

16.1. Etude de certains cas particuliers. Certains groupes cubiques remarquables sont peut-être virtuellement spéciaux, bien qu'on ne sache même pas pour le moment s'ils sont résiduellement finis. C'est le cas par exemple pour les groupes de pseudo-réflexions, introduits par Davis, Januszkiewicz et Scott ([25]).

Il nous semble raisonnable d'essayer de montrer que ces groupes sont bien virtuellement spéciaux, peut-être en commençant par exhiber un sous-groupe d'indice fini pour lequel les hyperplans n'ont pas d'auto-intersection. Il faudrait sans doute commencer par considérer le cas de la dimension 2, pour acquérir une bonne intuition géométrique.

Ces groupes ont retenu l'attention de plusieurs géomètres, car ils se présentent comme des versions tordues de groupes de Coxeter à angles droits. Cependant, nous ne pensons plus que cette "torsion" soit une raison suffisante pour croire qu'ils ne sont pas virtuellement spéciaux. En effet, avec les méthodes du théorème 16.1, on peut montrer que le groupe du polyèdre de Gromov pavé par hexagones, avec pour links de sommets le graphe complet sur quatre points, et d'holonomie constamment non triviale, est en fait virtuellement spécial.

16.2. Amalgames de complexes cubiques spéciaux. Actuellement nous finissons avec Dani Wise notre troisième article sur les groupes spéciaux. Nous montrons que certains graphes de complexes cubiques virtuellement spéciaux restent virtuellement spéciaux. Plus précisément :

Théorème 16.1. *Soit X un complexe cubique à $K \leq 0$ obtenu comme graphe fini de complexes cubiques compacts virtuellement spéciaux. Ainsi le complexe cubique à $K \leq 0$ de chaque arête s'immerge par une isométrie locale dans les complexes des sommets de l'arête. Si les groupes fondamentaux des espaces d'arêtes sont malnormaux dans les groupes fondamentaux des espaces de sommets, alors $\pi_1 X$ est virtuellement spécial - pour peu qu'il soit Gromov-hyperbolique.*

Cet énoncé apparemment un peu technique aura d'importantes conséquences. En effet tous les complexes cubiques compacts à $K \leq 0$ "connus" jusqu'à maintenant admettent un revêtement fini où tous les hyperplans sont plongés. Si on suppose de plus les hyperplans malnormaux, on voit en utilisant une hiérarchie d'hyperplans qu'on peut appliquer plusieurs fois le théorème précédent, et l'on en déduit que X est virtuellement spécial.

16.3. Groupes de surface dans les groupes cubiques spéciaux. Avec Henry Wilton nous essayons de montrer le résultat suivant :

Théorème 16.2. *Soit Γ un groupe cubique spécial hyperbolique. Alors ou bien Γ est virtuellement libre, ou bien Γ contient un groupe de surface.*

La question de savoir si un groupe hyperbolique à un bout contient un groupe de surface a été posée par Gromov, les réponses sont très partielles. Le cas de Coxeter à angles droits semble bien compris, il faudrait maintenant comprendre le cas spécial.

Plus généralement, on peut penser que la classe des groupes cubiques spéciaux est celle pour laquelle on sait résoudre assez facilement les questions habituelles de la théorie géométrique des groupes. Avec les groupes cubiques spéciaux, tout devrait "bien se passer", la situation se compliquant nettement lorsque on passe à des groupes cubiques non virtuellement spéciaux (comme par exemple pour le problème de la finitude résiduelle).

17. GROUPES DE COXETER À ANGLES DROITS.

Question 17.1. Un groupe de Coxeter à angles droits quelconque peut-il être représenté de façon discrète, géométriquement finie dans un espace hyperbolique de grande dimension ?

Si la réponse était oui, alors tous les groupes spéciaux seraient représentables dans $\text{Isom}(\mathbb{H}^N)$ - et probablement les groupes spéciaux hyperboliques seraient de la sorte convexes-cocompacts dans \mathbb{H}^n . Même s'il y a des limitations, il serait intéressant de les trouver. Notons que Misha Kapovich a obtenu un tel résultat de géométrisation des polygones à angles droits de groupes finis (cf. [52]). Notre résultat engloberait le sien, car ses groupes sont en fait cubiques spéciaux (hyperboliques).

Pour des groupes de Coxeter non à angles droits mais d'un type particulier il nous semble que la représentation de Tits convient : la forme de Tits est alors hyperbolique. Ces exemples suffisent déjà à retrouver un grand nombre de cas couverts par le théorème de Kapovich.

Éventuellement la question ci-dessus pourrait devenir un sujet de thèse, ou une partie d'un tel sujet.

18. CUBULATIONS.

Le problème est le suivant. On se donne une certaine géométrie X , avec un groupe Γ d'automorphismes discret cocompact. On cherche à définir un ensemble de murs sur X qui soit discrète (un nombre fini de murs séparent deux points donnés), et de plus invariante sous Γ .

18.1. Complexes systoliques ultra-pavables de Januszkiewicz-Swiątkowski. Il nous semble que pour les groupes fondamentaux de simplexes de groupes finis étudiés dans [51], la condition “ultra-pavable” permet de définir des murs sur ces complexes simpliciaux. En effet tout voisinage d’arête dans le complexe X est domaine fondamental strict pour un sous-groupe d’indice fini de Γ . Ainsi un voisinage d’arêtes est un rétract simplicial de X . Or un voisinage d’arêtes admet un mur naturel, qu’il suffit de tirer en arrière par la rétraction. Ceci permet - au moins en dimension deux - de définir une structure d’espace à mur invariante par un sous-groupe d’indice fini convenable de Γ . Nous pensons donc que :

Théorème 18.1. *Le groupe fondamental d’un simplexe de groupes fini ultra-pavable à $K_{\text{comb}} \leq 0$ considéré par Januszkiewicz-Swiątkowski est cubique. Si le simplexe est à $K_{\text{comb}} < 0$ alors le groupe est virtuellement cubique spécial (puisque ses sous-groupes quasi-convexes sont séparables par [46]).*

Ceci pose un petit problème. En effet, les seuls exemples de complexes simpliciaux à $K_{\text{comb}} \leq 0$ de grande dimension sont justement obtenus comme développements des simplexes de groupes finis ultra-pavables. Les réseaux uniformes des complexes simpliciaux à $K_{\text{comb}} \leq 0$ sont-ils donc tous cubiques en grande dimension ?

En fait nous pensons pouvoir construire des exemples en toute dimension qui sont des extensions de groupes de Kazhdan - et donc ne peuvent être cubiques. Mais nos exemples n’ont pas la propriété (T) .

Question 18.2. Peut-on construire des groupes à $K_{\text{comb}} \leq 0$ ayant la propriété (T) en toute dimension (cohomologique virtuelle) ?

18.2. Convexes divisibles de Benoist. Dans [3] Benoist introduit une classe de groupes hyperboliques linéaires particuliers : ceux qui “divisent” un cône strictement convexe. La distance sur le projectifié du cône convexe est la distance de Hilbert associée au bi-rapport projectif. Tous les exemples construits jusqu’à ce jour - même exotiques - sont des groupes cubiques.

Nous demandons si tous les groupes hyperboliques de Benoist sont cubiques, ou au moins ont la propriété de Haagerup.

Il semble que la géométrie de la distance de Hilbert soit beaucoup plus proche de la géométrie hyperbolique réelle que de la géométrie hyperbolique complexe. Par exemple dans cette géométrie il y a des murs naturels : les hyperplans linéaires qui coupent l’intérieur du cône. Et ces hyperplans sont géodésiquement convexes pour la distance de Hilbert.

Le problème est de définir une mesure naturelle sur l’ensemble des hyperplans, de sorte que la mesure des hyperplans séparant deux points soit finie.

18.3. Réseaux uniformes de l’espace hyperbolique réel. Soit Γ un réseau uniforme de l’espace hyperbolique réel \mathbb{H}^n . On demande si Γ est cubique, ou au moins admet une action non triviale sur un complexe cubique $CAT(0)$. Le problème est donc de passer d’une action sur un espace à murs mesurés à une action sur un espace à murs discret.

Parfois Γ préserve une famille localement finie d'hypersurfaces totalement géodésiques (comme dans le cas arithmétique de type simple), mais cette situation semble exceptionnelle. On peut se demander pourtant si Γ ne pourrait pas préserver une famille localement finie d'hypersurfaces quasi-convexes. Il suffirait alors d'appliquer le théorème de cubulation des espaces à murs.

La question est déjà redoutable en dimension 3. On peut repérer trouver des portions compactes d'hyperplans de \mathbb{H}^3 (des disques ou des polygones), et on peut parfois même avoir une règle pour les recoller. Mais qu'est-ce qui pourrait assurer que la surface immergée ainsi construite se plonge quasi-isométriquement? Il semble qu'on ait besoin d'un théorème assurant que certaines quasi-isométries locales de \mathbb{H}^2 dans \mathbb{H}^3 sont bien des plongements quasi-isométriques (résultat analogue à celui, classique, sur les quasi-isométries locales de $\mathbb{R} = \mathbb{H}^1$ dans \mathbb{H}^3).

Le plongement isométrique de \mathbb{H}^3 dans son espace médian associé permet de définir des complexes cubiques $CAT(0)$ compacts, correspondant à l'enveloppe médiane d'une (grande) partie finie d'une orbite de Γ . Il s'agirait alors de recoller convenablement ces morceaux cubiques $CAT(0)$ pour que les hyperplans naturels immergés du complexe carré obtenu définissent bien des hyperplans - c'est à dire soient plongés, si possible quasi-isométriquement.

RÉFÉRENCES

- [1] I. Agol, D. D. Long et A. W. Reid. The Bianchi groups are separable on geometrically finite subgroups. *Ann. of Math. (2)*, 153(3) :599–621, 2001.
- [2] J. M. Alonso and et al. Notes on word hyperbolic groups. In É. Ghys, A. Haefliger, and A. Verjovsky, editors, *Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990)*, pages 3–63. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1991. Edited by H. Short.
- [3] Y. Benoist. Convexes divisibles. I. In *Algebraic groups and arithmetic*, pages 339–374. Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2004.
- [4] N. Bergeron. Lefschetz properties for arithmetic real and complex hyperbolic manifolds. *Int. Math. Res. Not.*, 20 :1089–1122, 2003.
- [5] N. Bergeron, F. Haglund, et D. T. Wise. Hyperplane sections in arithmetic hyperbolic manifolds. Prépublication, 2007.
- [6] M. Bestvina et M. Feighn. A combination theorem for negatively curved groups. *J. Differential Geom.*, 35(1) :85–101, 1992.
- [7] L. J. Billera, S. P. Holmes et K. Vogtmann. Geometry of the space of phylogenetic trees. *Adv. in Appl. Math.*, 27(4) :733–767, 2001.
- [8] N. Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie. Chapitres IV, V, VI*. Éléments de mathématique. Masson, Paris, 2ème édition, 1981.
- [9] M. Bourdon. Immeubles hyperboliques, dimension conforme et rigidité de Mostow. *Geom. Funct. Anal.*, 7(2) :245–268, 1997.
- [10] B. H. Bowditch. A topological characterisation of hyperbolic groups. *J. Amer. Math. Soc.*, 11(3) :643–667, 1998.
- [11] M.R. Bridson et A. Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

- [12] F. Bruhat et J. Tits. Groupes réductifs sur un corps local. *Inst. Hautes études Sci. Publ. Math.*, 41 :5–251, 1972.
- [13] M. Burger et S. Mozes. Lattices in product of trees. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (92) :151–194 (2001), 2000.
- [14] S. Buyalo et V. Schroeder. Embedding of hyperbolic spaces in the product of trees. *Geom. Dedicata*, 113 :75–93, 2005.
- [15] P.E. Caprace et F. Haglund. On geometric flats in the CAT(0) realization of Coxeter groups and Tits buildings. *Canad. J. Math.*. À paraître, 2007.
- [16] C. Champetier. Propriétés statistiques des groupes de présentation finie. *Adv. Math.*, 116(2) :197–262, 1995.
- [17] I. Chatterji, C. Druţu et F. Haglund. Median spaces and spaces with measured walls. Prépublication, <http://fr.arXiv.org/abs/0704.3749>, 2007.
- [18] I. Chatterji et G. Niblo. From wall spaces to CAT(0) cube complexes. *Internat. J. Algebra Comput.*, 15(5-6) :875–885, 2005.
- [19] V. Chepoi. Graphs of some CAT(0) complexes. *Adv. in Appl. Math.*, 24(2) :125–179, 2000.
- [20] P.A. Cherix, M. Cowling, P. Jolissaint, P. Julg et A. Valette. *Groups with the Haagerup property*, volume 197 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2001. Gromov’s a-T-menability.
- [21] P.-A. Cherix, F. Martin et A. Valette. Spaces with measured walls, the Haagerup property and property (T). *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 24(6) :1895–1908, 2004.
- [22] Z. Ciesielski and C. Olech, editors. *Infinite groups as geometric objects*. PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw ; North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1984.
- [23] M. W. Davis. Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space. *Ann. of Math. (2)*, 117(2) :293–324, 1983.
- [24] M.W. Davis. Buildings are CAT(0). In *Geometry and cohomology in group theory (Durham, 1994)*, volume 252 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 108–123. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
- [25] M.W. Davis, T. Januszkiewicz et R. Scott. Nonpositive curvature of blow-ups. *Selecta Math. (NS)* 4 (4) :491–547, 1998.
- [26] T. Delzant. L’image d’un groupe dans un groupe hyperbolique. *Comment. Math. Helv.*, 70(2) :267–284, 1995.
- [27] T. Delzant. Sous-groupes distingués et quotients des groupes hyperboliques. *Duke Math. J.*, 83(3) :661–682, 1996.
- [28] T. Delzant et M. Gromov. Cuts in Kähler groups. In *Infinite groups : geometric, combinatorial and dynamical aspects*, volume 248 of *Progr. Math.*, pages 31–55. Birkhäuser, Basel, 2005.
- [29] A. Dress et R. Scharlau. Gated sets in metric spaces. *Aequationes Math.*, 34(1) :112–120, 1987.
- [30] J. Dymara et D. Osajda. Boundaries of right-angled hyperbolic buildings. Prépublication, <http://arxiv.org/abs/math/0610114v1>, 2006.
- [31] D. Gaboriau et F. Paulin. Sur les immeubles hyperboliques. *Geom. Dedicata*, 88(1-3) :153–197, 2001.
- [32] V. N. Gerasimov. Semi-splittings of groups and actions on cubings. In *Algebra, geometry, analysis and mathematical physics (Russian) (Novosibirsk, 1996)*, pages 91–109, 190. Izdat. Ross. Akad. Nauk Sib. Otd. Inst. Mat., Novosibirsk, 1997.
- [33] É. Ghys and P. de la Harpe, editors. *Sur les groupes hyperboliques d’après Mikhael Gromov*, volume 83 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1990. Papers from the Swiss Seminar on Hyperbolic Groups held in Bern, 1988.

- [34] M. Gromov. Hyperbolic groups. In *Essays in group theory*, volume 8 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 75–263. Springer, New York, 1987.
- [35] M. Gromov. Asymptotic invariants of infinite groups. In *Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991)*, volume 182 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 1–295, Cambridge, 1993. Cambridge Univ. Press.
- [36] F. Haglund. Les polyèdres de Gromov. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I*, 313(9) :603–606, 1991.
- [37] F. Haglund. Réseaux de Coxeter-Davis et commensurateurs. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 48(3) :649–666, 1998.
- [38] F. Haglund. Existence, unicité et homogénéité de certains immeubles hyperboliques. *Math. Z.*, 242(1) :97–148, 2002.
- [39] F. Haglund. Complexes simpliciaux hyperboliques de grande dimension. Prépublication, 2003.
- [40] F. Haglund. Commensurability and separability of quasiconvex subgroups. *Algebr. Geom. Topol. (électronique)*, 6 :949–1024, 2006.
- [41] F. Haglund. Finite index subgroups of graph products. *Geom. Dedicata*, 2007. Accepté.
- [42] F. Haglund. Isometries of CAT(0) cube complexes are semi-simple. Prépublication, <http://fr.arxiv.org/abs/0705.3386>, 2007.
- [43] F. Haglund. Finite extensions of cubic groups. En préparation, 2007.
- [44] F. Haglund et F. Paulin. Simplicité de groupes d’automorphismes d’espaces à courbure négative. In *The Epstein birthday schrift*, pages 181–248 (électronique). *Geom. Topol.*, Coventry, 1998.
- [45] F. Haglund et F. Paulin. Constructions arborescentes d’immeubles. *Math. Ann.*, 325(1) :137–164, 2003.
- [46] F. Haglund et J. Świątkowski. Separating quasi-convex subgroups in 7-systolic groups. Soumis à *Groups Geom. Dyn.*, 2006.
- [47] F. Haglund et D. T. Wise. Special cube complexes. *GAFSA, Geom. Funct. Anal.*, 2007. À paraître.
- [48] F. Haglund et D. T. Wise. Coxeter groups are special. Soumis, 2007.
- [49] C. H. Houghton. Ends of locally compact groups and their coset spaces. *J. Austral. Math. Soc.*, 17 :274–284, 1974. Collection of articles dedicated to the memory of Hanna Neumann, VII.
- [50] T. Januszkiewicz et J. Świątkowski. Hyperbolic Coxeter groups of large dimension. *Comment. Math. Helv.*, 78(3) :555–583, 2003.
- [51] T. Januszkiewicz et J. Świątkowski. Simplicial nonpositive curvature. *Publ. Math. IHES*, 104 :211–228, 2006.
- [52] M. Kapovich. Representations of polygons of finite groups. *Geom. Topol.*, 9 :1915–1951 (électronique), 2005.
- [53] G. Moussong. *Hyperbolic Coxeter Groups*. PhD thesis, Ohio State University, 1988.
- [54] M. Mulder. The structure of median graphs. *Discrete Math.*, 24(2) :197–204, 1978.
- [55] L. Nebeský. Median graphs. *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 12 :317–325, 1971.
- [56] G. A. Niblo et L.D. Reeves. Coxeter groups act on CAT(0) cube complexes. *J. Group Theory*, 6(3) :399–413, 2003.
- [57] B. Nica. Cubulating spaces with walls. *Algebr. Geom. Topol.*, 4 :297–309 (électronique), 2004.
- [58] A. Yu. Ol’shanskiĭ. Almost every group is hyperbolic. *Internat. J. Algebra Comput.*, 2(1) :1–17, 1992.
- [59] O. T. O’Meara. *Introduction to quadratic forms*, volume 117 of *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1971.

- [60] P. Papasoglu. Strongly geodesically automatic groups are hyperbolic. *Invent. Math.*, 121(2) :323–334, 1995.
- [61] F. Paulin. Outer automorphisms of hyperbolic groups and small actions on \mathbf{R} -trees. In *Arboreal group theory (Berkeley, CA, 1988)*, volume 19 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 331–343. Springer, New York, 1991.
- [62] F. Paulin. Un groupe hyperbolique est déterminé par son bord. *J. London Math. Soc. (2)*, 54(1) :50–74, 1996.
- [63] L. Potyagailo et E. Vinberg. On right-angled reflection groups in hyperbolic spaces. *Comment. Math. Helv.*, 80(1) :63–73, 2005.
- [64] E. Rips et Z. Sela. Structure and rigidity in hyperbolic groups. I. *Geom. Funct. Anal.*, 4(3) :337–371, 1994.
- [65] M.A. Roller. Poc sets, median algebras and group actions. An extended study of Dunwoody’s construction and Sageev’s theorem. Prépublication Univ. Southampton, 1998.
- [66] M.A. Ronan. A construction of buildings with no rank 3 residues of spherical type. In L. A. Rosati, editor, *Buildings and the geometry of diagrams (Como, 1984)*, Lecture Notes in Math. 1181, pages 242–248. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [67] M. Ronan. *Lectures on buildings*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1989.
- [68] M.A. Ronan et J. Tits. Building buildings. *Math. Ann.*, 278(1-4) :291–306, 1987.
- [69] M. Sageev. Ends of group pairs and non-positively curved cube complexes. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 71(3) :585–617, 1995.
- [70] P. Scott. Subgroups of surface groups are almost geometric. *J. London Math. Soc. (2)*, 17(3) :555–565, 1978.
- [71] Z. Sela. The isomorphism problem for hyperbolic groups. I. *Ann. of Math. (2)*, 141(2) :217–283, 1995.
- [72] Z. Sela. Structure and rigidity in (Gromov) hyperbolic groups and discrete groups in rank 1 Lie groups. II. *Geom. Funct. Anal.*, 7(3) :561–593, 1997.
- [73] Z. Sela. Endomorphisms of hyperbolic groups. I. The Hopf property. *Topology*, 38(2) :301–321, 1999.
- [74] J. Tits. Théorème de Bruhat et sous-groupes paraboliques. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 254 :2910–2912, 1962.
- [75] J. Tits. Le problème des mots dans les groupes de Coxeter. In *Symposia Mathematica (INDAM, Rome, 1967/68)*, Vol. 1, pages 175–185. Academic Press, London, 1969.
- [76] J. Tits. A local approach to buildings. In *The geometric vein*, pages 519–547. Springer, New York, 1981.
- [77] J. Tits. Structures et groupes de Weyl. In *Séminaire Bourbaki, Exp. 288*, Vol. 9, pages 169–183. Soc. Math. France, Paris, 1995.
- [78] D. T. Wise. *Non-positively curved squared complexes, aperiodic tilings, and non-residually finite groups*. PhD thesis, Princeton University, 1996.
- [79] D. T. Wise. The residual finiteness of negatively curved polygons of finite groups. *Invent. Math.*, 149(3) :579–617, 2002.
- [80] D. T. Wise. Cubulating small cancellation groups. *GAF A, Geom. Funct. Anal.*, 14(1) :150–214, 2004.