Fiche de TD numéro 5bis. Théorème Noyau-Image. Matrices inversibles.

**Exercice 1**

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par $f(x, y, z, t) = (3x + 4y + 2z + t, x + 2y - z - t, -x - y + 3z + 2t, 2x - y + t)$. Soit $A$ la matrice de $f$ dans la base canonique.

(a) Déterminer $A$.

(b) Montrer que l'image de la suite $((1, 0, 1, -1), (0, -1, 1, -2))$ est liée. En déduire que $f$ n'est pas injective. L'application $f$ est-elle surjective ?

(c) Le deuxième vecteur-colonne est-il combinaison linéaire des troisième et quatrième vecteurs-colonnes ? En déduire $\mathrm{rg}(f)$. Le premier vecteur colonne est-il combinaison linéaire des trois suivants ?

(d) Trouver une matrice ligne $L$ telle que $LA = 0$, et en déduire une équation cartésienne de $\mathrm{Im}(f)$.

**Exercice 2**

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(x, y, z, t) = (x+2y+3z+4t, -2x-y+t, x-y-3z-5t)$.

(a) Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ ? En donner une base.

(b) Donner une équation liant $a, b, c$ qui soit satisfaite si et seulement si l'équation $f(x, y, z, t) = (a, b, c)$ admet une solution. Combien l'équation $f(u) = (1, 1, 2)$ a t-elle de solution? et l'équation $f(u) = (1, 1, -2)$?

(c) Soit $E = \mathrm{Vect}(u_1 = (1, 0, 1, 0), u_2 = (0, 1, 0, 1)$. Vérifier que $E \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ et en déduire que $E \oplus \mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}^4$. Comparer $f(E)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

(d) Lorsque $(a, b, c) \in \mathrm{Im}(f)$ montrer que le problème $\big(f(x, y, z, t) = (a, b, c), (x, y, z, t) \in E\big)$ admet une unique solution. Résoudre le problème $\big(f(x, y, z, t) = (1, 1, -2), (x, y, z, t) \in E\big)$

**Exercice 3** Matrice inversible, calcul de l'inverse.

On considère les matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

En résolvant l'équation matricielle $AX = Y$ (à l'inconnue $X$, et pour n'importe quelle valeur des paramètres $a, b, c, d$), montrer que la matrice carrée $A$ de taille 4 est inversible et donner son inverse.

En trouvant des combinaisons linéaires des vecteurs colonnes qui donnent les vecteurs de base canonique, retrouver $A^{-1}$.

**Exercice 4** Matrices de passage.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(a) Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1 = (-1, 2, 3), u_2 = (1, -1, 1), u_3 = (-1, 1, -2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de passage $P$ de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

(b) Soit $u = 2u_1 - 3u_2 + 5u_3$. Quel calcul matriciel permet de déterminer les composantes $x, y, z$ de $u$ ? Donner $x, y, z$.

(c) On pose $E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$. A quelle condition sur $y_1, y_2, y_3$ le vecteur $y_1u_1 + y_2u_2 + y_3u_3$ appartient-il à $E$ ? Donner une équation cartésienne de $E$.

(d) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -1 \\ -5 & -3 & 1 \\ 10 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

On pose $A' = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}')$.

Quelle formule utilisant $P, P^{-1}$ et $A$ permet de calculer $A'$ ? Déterminer $A'$ puis calculer $A \times A$.