Fiche de TD numéro 3. Systèmes linéaires. Suites libres et génératrices. Bases, dimension.

Exercice 1 Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1)\begin{cases} x+2y &= 3 \\ 4x+5y &= 6 \end{cases}, \quad (S_2)\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ 2x-y+3z &= -1 \\ 5x-4y+8z &= -4 \end{cases}, \quad (S_3)\begin{cases} x-3y+z-t &= 0 \\ -x+2y-z-2t &= 1 \\ -3x+7y-3z-3t &= 2 \\ -x-z-8t &= 3 \end{cases}$$

Exercice 2 Soit $m \in \mathbb{R}$ un paramètre. En discutant suivant les valeurs de m, résoudre :

$$(S_1)\begin{cases} x+my &= 0 \\ mx+y &= 0 \end{cases}, \quad (S_2)\begin{cases} x+my+m^2z &= 1 \\ 2x+y+5z &= 5 \\ x-y+z &= 2 \end{cases}, \quad (S_3)\begin{cases} -mx+y+z &= -2 \\ x-my+z &= 1 \\ x+y-mz &= 1 \end{cases}$$

Exercice 3 Soit $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ des paramètres réels. En discutant suivant les valeurs de a, b, c, résoudre le système :

$$(S)\begin{cases} x+ay+a^2z &= \alpha \\ x+by+b^2z &= \beta \\ x+cy+c^2z &= \gamma \end{cases}$$

Exercice 4 Soient a, b, c, d des paramètres réels. Résoudre le système suivant aux inconnues x, y, z, t :

$$(S)\begin{cases} ax+by &= 1 \\ cx+dy &= 0 \\ az+bt &= 0 \\ cz+dt &= 1 \end{cases}$$

Exercice 5 Suites libres

Soit $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (4,1,4)$ et $v_3 = (2,-1,4)$.

(a) Montrer que v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires, puis qu'il en est de même pour v_2 et v_3 ainsi que pour v_1 et v_3.

(b) La suite (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?

Exercice 6 Extraction d'une base.

On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs suivants : $v_1 = (0,1,0,2)$, $v_2 = (1,2,3,4)$, $v_3 = (-1,2,-3,4)$, $v_4 = (1,-1,1,-1)$, $v_5 = (0,1,2,1)$, $v_6 = (1,1,1,1)$.

(a) La suite $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ est-elle libre ?

(b) Peut-on exprimer chacun des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$ en fonction des vecteurs $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$? La suite $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ engendre t-elle $\mathbb{R}^4$?

(c) Extraire de la suite $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ deux bases différentes de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 7 Coordonnées dans une base.

Montrer que dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (-1, -1, 2)$ et $v_3 = (-2, 1, -2)$ forment une base. Calculer les coordonnées dans cette base d'un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Exercice 8 Base incomplète

Soit (e_1, e_2, e_3) une base de $\mathbb{R}^3$.

(a) On pose $v_1 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ et $v_2 = e_2 + e_3$. Montrer que (v_1, v_2) est une suite libre.

(b) Compléter la suite (v_1, v_2) en une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9 Ensemble des solutions d'une équation linéaire homogène.

Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y + z + t = 0\}$. Est-ce un sous-espace vectoriel ? Si oui, en donner une base.

Exercice 10 Base d'un sous-espace vectoriel.

Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$E = \{(\lambda_1 + 2\lambda_3, 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3, 2\lambda_3 - 2\lambda_2, \lambda_2 - \lambda_1 - 3\lambda_3) \in \mathbb{R}^4,\ \text{avec } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ réels quelconques}\}.$$

(a) Montrer E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(b) Donner une partie génératrice, puis une base de E.

Exercice 11 Intersection de plans en dimension 4.

Soit $e_1 = (1, 2, 3, 4)$ et $e_2 = (1, -2, 3, -4)$ et soit $E = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.

(a) Combien existe t-il de couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x, 1, y, 1) \in E$?

(b) Qu'en est-il si on cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x, 1, 1, y) \in E$?

Exercice 12

Montrer que les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$E = \mathrm{Vect}((2, 3, -1), (1, -1, -2)), F = \mathrm{Vect}((3, 7, 0), (5, 0, -7))$$

sont égaux.

Exercice 13

On considère dans $\mathbb{R}^n$ une suite libre (e_1, e_2, e_3, e_4) et on note E le sous-espace vectoriel qu'elle engendre dans $\mathbb{R}^n$.

(a) Que dire sur n ?

(b) Parmi les parties suivantes, déterminer celles qui sont libres, celles qui engendrent E, celles qui forment une base de E :

$$E_1 = \{e_1, 2e_2, e_3\}, E_2 = \{e_1, 2e_1 + e_4, e_4\}, E_3 = \{e_3, 3e_1 + 2e_3, e_2 + e_3\},$$
$$E_4 = \{2e_1 + e_2, e_1 - 3e_2, e_4, e_2 - e_1\}, E_5 = \{e_1, 2e_1 + 3e_2, 4e_1 - 5e_2 - 6e_3, e_1 + e_2 - e_3 - e_4\},$$
$$E_6 = \{e_1, 2e_1 + 3e_2, e_3 - 2e_1 + e_4, 4e_1 - 5e_2 - 6e_3, e_1 + e_2 - e_3 - e_4\}.$$