

Fiche de TD numéro 3. Systèmes linéaires. Suites libres et génératrices. Bases, dimension.

Exercice 1 Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1) \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases}, \quad (S_2) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = -1 \\ 5x - 4y + 8z = -4 \end{cases}, \quad (S_3) \begin{cases} x - 3y + z - t = 0 \\ -x + 2y - z - 2t = 1 \\ -3x + 7y - 3z - 3t = 2 \\ -x - z - 8t = 3 \end{cases}$$

Exercice 2 Soit $m \in \mathbb{R}$ un paramètre. En discutant suivant les valeurs de m , résoudre :

$$(S_1) \begin{cases} x + my = 0 \\ mx + y = 0 \end{cases}, \quad (S_2) \begin{cases} x + my + m^2z = 1 \\ 2x + y + 5z = 5 \\ x - y + z = 2 \end{cases}, \quad (S_3) \begin{cases} -mx + y + z = -2 \\ x - my + z = 1 \\ x + y - mz = 1 \end{cases}$$

Exercice 3 Soit $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ des paramètres réels. En discutant suivant les valeurs de a, b, c , résoudre le système :

$$(S) \begin{cases} x + ay + a^2z = \alpha \\ x + by + b^2z = \beta \\ x + cy + c^2z = \gamma \end{cases}$$

Exercice 4 Soient a, b, c, d des paramètres réels. Résoudre le système suivant aux inconnues x, y, z, t :

$$(S) \begin{cases} ax + by = 1 \\ cx + dy = 0 \\ az + bt = 0 \\ cz + dt = 1 \end{cases}$$

Exercice 5 Suites libres

Soit $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (4, 1, 4)$ et $v_3 = (2, -1, 4)$.

(a) Montrer que v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires, puis qu'il en est de même pour v_2 et v_3 ainsi que v_1 et v_3 .

(b) La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est-elle libre ?

Exercice 6 Extraction d'une base.

On considère dans \mathbb{R}^4 les vecteurs suivants : $v_1 = (0, 1, 0, 2)$, $v_2 = (1, 2, 3, 4)$, $v_3 = (-1, 2, -3, 4)$, $v_4 = (1, -1, 1, -1)$, $v_5 = (0, 1, 2, 1)$, $v_6 = (1, 1, 1, 1)$.

(a) La suite $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ est-elle libre ?

(b) Peut-on exprimer chacun des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de \mathbb{R}^4 en fonction des vecteurs $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$? La suite $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ engendre-t-elle \mathbb{R}^4 ?

(c) Extraire de la suite $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ deux bases différentes de \mathbb{R}^4 .

Exercice 7 Coordonnées dans une base.

Montrer que dans \mathbb{R}^3 les vecteurs $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (-1, -1, 2)$ et $v_3 = (-2, 1, -2)$ forment une base. Calculer les coordonnées dans cette base d'un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Exercice 8 Base incomplète

Soit (e_1, e_2, e_3) une base de \mathbb{R}^3 .

- (a) Montrer que $v_1 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ et $v_2 = e_2 + e_3$ forme une famille libre.
- (b) Compléter la famille (v_1, v_2) en une base de \mathbb{R}^3 .

Exercice 9 Ensemble des solutions d'une équation linéaire homogène.

Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0\}$. Est-ce un sous-espace vectoriel ? Si oui, en donner une base.

Exercice 10 Base d'un sous-espace vectoriel.

Soit $E \subset \mathbb{R}^4$ le sous-ensemble défini par :

$$E = \{(\lambda_1 + 2\lambda_3, 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3, 2\lambda_3 - 2\lambda_2, \lambda_2 - \lambda_1 - 3\lambda_3) \in \mathbb{R}^4, \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ réels quelconques}\}$$

- (a) Montrer E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .
- (b) Donner une partie génératrice, puis une base de E .

Exercice 11 Intersection de plans en dimension 4.

Soit $e_1 = (1, 2, 3, 4)$ et $e_2 = (1, -2, 3, -4)$ et soit $E = \text{Vect}(e_1, e_2)$.

- (a) Combien existe-t-il de couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x, 1, y, 1) \in E$?
- (b) Qu'en est-il si on cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x, 1, 1, y) \in E$?

Exercice 12 Montrer que les deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 définis par

$$E = \text{Vect}((2, 3, -1), (1, -1, -2)), F = \text{Vect}((3, 7, 0), (5, 0, -7))$$

sont égaux.

Exercice 13

On considère dans \mathbb{R}^n une famille libre de quatre vecteurs $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ et on note E le sous-espace vectoriel engendré.

- (a) Que pouvez-vous dire sur n ?
- (b) Parmi les familles suivantes, déterminer celles qui sont libres, celles qui engendrent E , celles qui forment une base de E :

$$E_1 = \{e_1, 2e_2, e_3\}, E_2 = \{e_1, 2e_1 + e_4, e_4\}, E_3 = \{e_3, 3e_1 + 2e_3, e_2 + e_3\}, E_4 = \{2e_1 + e_2, e_1 - 3e_2, e_4, e_2 - e_1\}, E_5 = \{e_1, 2e_1 + 3e_2, 4e_1 - 5e_2 - 6e_3, e_1 + e_2 - e_3 - e_4\}, E_6 = \{e_1, 2e_1 + 3e_2, e_3 - 2e_1 + e_4, 4e_1 - 5e_2 - 6e_3, e_1 + e_2 - e_3 - e_4\}$$