Orsay 2008-2009 IFIPS S2 Mathématiques (M160).

Fiche de TD numéro 6. Suites numériques.

Exercice 1 Révisions sur les DL.

(a) Donner les développements limités quand $x \to 0$ des fonctions suivantes, à l'ordre indiqué :

$$3x^3 - 2x^4 + x^6 \text{ (ordre } 2,3,7), \quad e^x \text{ (ordre } 0,1,2,k), \quad \cos(x) \text{ (ordre } 1,2,k),$$

$$\sin(x) \text{ (ordre } 1,2,3,k), \quad \frac{1}{1+x} \text{ (ordre } 1,2,k), \quad \ln(1+x) \text{ (ordre } 1,2,3,k)$$

(b) Donner les développements limités quand $x \to 0$ des fonctions suivantes, à l'ordre indiqué :

$$\frac{1-x+x^2}{1+x-x^2} \text{ (ordre 2)}, \quad \frac{\sin(x)}{e^x-1} \text{ (ordre 3)}, \quad \frac{1}{x+\cos(x)} \text{ (ordre 3)}, \quad e^{x\sin(x)} \text{ (ordre 4)}$$

$$\arcsin(x) - x\cos(x) \text{ (ordre 3)}, \quad (1+x)^\alpha \arctan(x) \text{ (ordre } 3, \alpha \in \mathbb{R}^{+*})$$

(c) On considère la fonction

$$f(x) = \frac{\sin(x) - \ln(1+x) - \frac{x^2}{2}}{(1-x)\cos(x) - e^{-(x+x^2)}}.$$

Pour tout entier $n > 0$ on pose $u_n = f(\frac{1}{n})$. En utilisant un DL du numérateur et du dénominateur de f, montrer que u_n est défini pour n assez grand et calculer $\lim_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 2 Attention aux opérations sur les équivalents, les O, les o, ...

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

$$n+1 \sim n, \quad 2^{n+1} \sim 2^n, \quad n + \sqrt{n} = O(n), \quad 2^{n+\sqrt{n}} = O(2^n),$$

$$2^{\sqrt{n}} = o(2^n), \quad e^n = o(n!), \quad n! = o(n^n).$$

Exercice 3 Équivalents.

Trouver des équivalents simples pour les suites ci-dessous :

$$\sin(1+\frac{1}{n}), \quad n\ln(1+\frac{1}{n}), \quad \frac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})} - \frac{1}{\sin(\frac{1}{n})},$$

$$(1+\sin(\frac{1}{n}))^n, \quad \sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln(n)}, \quad n\cos(\frac{1}{n}) - \sqrt{n^2-1},$$

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)), \quad \ln(\sqrt{1+n^2}+n), \quad \ln(\sqrt{1+n^2}-n), \quad \cos(\frac{1}{n}) - \frac{1}{4}\cos(\frac{2}{n}) - \frac{3}{4}.$$

Exercice 4
(a) Donner un équivalent, quand $n \to +\infty$, de $u_n = 1 - 2n + 3n^2$. Quelle est la limite de $(u_n)_{n\geq 0}$?
(b) On considère la suite de terme général $v_n = 1 - 2n + 3n^2 \cos(\frac{n\pi}{3})$. Cette suite admet-elle une limite quand $n \to +\infty$? Est-elle bornée ? Montrer que $v_n = O(u_n)$. A t-on $v_n = \Theta(u_n)$?

Exercice 5 : applications des DL à l'étude des limites de suites.
Calculer les limites des suites ci-dessous :

$$n(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1), \qquad n\ln(1+\frac{1}{n}), \qquad n^2 - \frac{1}{\sin^2(\frac{1}{n})}, \qquad n^3(e^{\frac{1}{n+1}} + e^{\frac{1}{n-1}} - 2e^{\frac{1}{n}})$$

Exercice 6 Croissances comparées.
Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas suivants :
(a) Le terme général est $u_n = n\cos(2n) - (\ln n)^2 + \frac{1}{1+n^3} + 2^{\frac{n}{10}}$.
(b) Le terme général est $u_n = \frac{e^{\frac{1}{n}} - \cos(\frac{1}{n}) - \sin(\frac{1}{n})}{\ln(1+\frac{1}{n^2}) - ne^{-n}}$.

Exercice 7 Comparer la croissance des suites suivantes (O, Ω, Θ) :

$$u_n = \sin(n), \qquad v_n = \ln(1+\frac{1}{n}), \qquad w_n = n\ln(1+\frac{1}{n}+e^n), \qquad t_n = 2+\cos(n).$$