Fiche de TD numéro 4. Sous-espaces vectoriels :
bases, intersection et sommes, sous-espaces supplémentaires, systèmes d'équations cartésiennes.

Exercice 1 Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $v_1 = (1, -1, 0, 2)$, $v_2 = (1, 0, 1, 2)$, $v_3 = (1, 3, 5, 7)$ et $v_4 = (0, 2, 3, a)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

(a) Pour quelles valeurs de a la suite $S = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est-elle une base ?

(b) Pour les valeurs de a où S est liée, donner une relation de dépendance linéaire entre ses vecteurs.

(c) Quelle est la dimension de $E = \mathrm{Vect}(S)$ selon les valeurs de a ?

Soit $k \in \mathbb{R}$. Soit $e = (4, k, 1, 3)$.

(d) Pour les valeurs de a où S est liée, quelles sont les valeurs de k telles que $e \in E$? Pour ces valeurs de k et de a, exprimer e en fonction de v_1, v_2, v_3 et v_4.

(e) Quand a t-on $e \in E$ pour les valeurs de a où S est libre ? Donner les coordonnées de e dans S.

Exercice 2 Suite échelonnée et pivot.

(1) On considère la suite de vecteurs (u_1, u_2, u_3, u_4) de $\mathbb{R}^4$ donnée par :

$$u_1 = (2, 0, 0, 0), u_2 = (-1, 4, 0, 0), u_3 = (0, 2, 3, 0), u_4 = (1, 0, 0, -2)$$

Montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.

(Si on écrit ces vecteurs en colonne, le système correspondant est échelonné, on dit donc que la suite est échelonnée.)

(2) Soit (v_1, v_2, v_3, v_4) une suite de vecteurs $\mathbb{R}^4$.

(2-a) Montrer que si les premières coordonnées de v_1, v_2, v_3 et v_4 sont nulles, alors la suite (v_1, v_2, v_3, v_4) est liée.

(2-b) Si la première composante de v_1 est non nulle, et si a_1, a_2, a_3, a_4 désignent les premières composantes de v_1, v_2, v_3, v_4 on pose :

$$v_2' = v_2 - \frac{a_2}{a_1} v_1, v_3' = v_3 - \frac{a_3}{a_1} v_1, v_4' = v_4 - \frac{a_4}{a_1} v_1$$

(vecteurs obtenus par des opérations de type "pivot")

Montrer que $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2', v_3', v_4')$. Quelles sont les premières composantes de v_2', v_3', v_4' ? Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) la suite (v_2', v_3', v_4') est libre ;

(ii) la suite (v_1, v_2', v_3', v_4') est libre ;

(iii) la suite (v_1, v_2, v_3, v_4) de départ est libre.

(3) En utilisant des opérations de type pivot, montrer que

$$\mathcal{B} = ((1, -2, 0, -1), (-2, 5, -1, 2), (0, -1, 5, 2), (-1, 2, 2, 6))$$

est une base. En utilisant une seconde série d'opérations de type pivot trouver les coordonnées de chaque vecteur de la base canonique dans la base $\mathcal{B}$, et en déduire les coordonnées dans $\mathcal{B}$ d'un vecteur $u = (x, y, z, t)$.

Exercice 3 Soit $E \subset \mathbb{R}^5$ un sous-espace vectoriel.

(a) Que dire de $\dim(E)$?

(b) Dans cette question on suppose que E est engendré par une suite (u_1, u_2, u_3). Montrer que toute suite de 4 vecteurs de E est liée.

(c) Dans cette question on suppose que E contient une suite libre (v_1, v_2, v_3). Montrer qu'aucune partie de E à 2 éléments n'est génératrice.

Exercice 4 Soient E, F, G, H des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$. On suppose que $E \subset F \subset G \subset H$, et de plus $E \neq \{0\}, H \neq \mathbb{R}^4$. Montrer que deux des sous-espaces sont égaux.

Exercice 5 Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ y + z + t = 0\}$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y = 0 \text{ et } z = 2t\}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
(a) Déterminer la dimension et une base de E et F.
(b) Trouver la dimension et une base de $E \cap F$.
(c) Que peut-on dire de $E + F$? La somme est-elle directe ?

Exercice 6 Base d'une intersection.

Dire si la somme de E_i et E_j est directe et donner la dimension de cette somme, pour E_i, E_j deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ distincts quelconques dans la liste ci-dessous :
$E_1 = \text{Vect}(1, 0, 1, 0), (5, -1, 6, 0))$;
$E_2 = \text{Vect}((0, 3, 4, 4), (-1, 1, 2, 4))$;
$E_3 = \text{Vect}((1, 1, 2, 0), (1, 2, 2, 0), (3, 1, 6, 0))$.

Exercice 7

On considère le sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^4$ défini par $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ 2x - 2y - z + t = 0\}$.
(a) Déterminer la dimension de E et une base de E.
(b) Déterminer un supplémentaire de E.

Exercice 8 Considérons les vecteurs suivant de $\mathbb{R}^5$:

$$u_1 = (3, 2, 3, -1, 2), u_2 = (1, 2, 1, -1, -2), u_3 = (1, -6, 1, 3, 14),$$

$$v_1 = (3, 4, 3, -2, -2), v_2 = (-2, -3, -3, 1, 2), v_3 = (2, 1, -3, -3, 2).$$

Soient $E = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ et $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$.
(a) Trouver une base et la dimension de E.
(b) Même question pour F.
(c) Déterminer la dimension et une base de $E \cap F$.
(d) E et F sont-ils en somme directe ? En déduire la dimension de $E + F$.
(e) Donner une base de $E + F$.
(f) Donner un supplémentaire (dans $\mathbb{R}^5$) de E, F et $E + F$.

Exercice 9 Base incomplète et système d'équations cartésiennes.

Soit $u_1 = (1, 1, 1, 2), u_2 = (0, 1, 2, -1), u_3 = (1, 3, 5, 0)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$, et soit $E = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.

(a) Donner une base $\mathcal{B}$ de E et la dimension de E. Si $u \notin E$ est-il possible de compléter $\mathcal{B}$ en une base de $\mathbb{R}^4$ dont le troisième vecteur est u ? Donner un exemple de vecteurs u, v tels que (u, v) est libre mais il est impossible de compléter $\mathcal{B}$ en une base de $\mathbb{R}^4$ ayant comme troisième et quatrième vecteur u et v.

(b) En utilisant des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$, compléter $\mathcal{B}$ en une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^4$. Si on note (y_1, y_2, y_3, y_4) les coordonnées d'un vecteur u dans la base $\mathcal{B}'$, montrer que $u \in E \iff y_3 = y_4 = 0$.

(c) Déterminer les coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$. En déduire un *système d'équations cartésiennes de* E dans les coordonnées canoniques (i.e. un système linéaire (S) à 4 inconnues, tel qu'un vecteur $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ appartient à E si et seulement si (x_1, x_2, x_3, x_4) est solution de (S)).

Exercice 10 Conditions de compatibilité et systèmes d'équations cartésiennes.

Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs

$$v = (1, 2, -3, 1), w = (1, -1, 1, -3)$$

et on pose $E = \text{Vect}(v, w)$.

(a) Vérifier que (v, w) est une base de E.

(b) Montrer qu'un vecteur $u = (x, y, z, t)$ de $\mathbb{R}^4$ est dans E ssi un certain système linéaire (Σ_u) est compatible (on explicitera le système (Σ_u) ; on remarquera en particulier que seul le deuxième membre dépend du vecteur u).

(c) Montrer que le système (Σ_u) est compatible ssi (x, y, z, t) est solution d'un certain système linéaire homogène (S).

(d) Donner un système d'équations cartésiennes de E.

Exercice 11 Systèmes d'équations cartésiennes dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

(a) Donner un système d'équation cartésienne de la droite du plan $\mathbb{R}^2$ engendrée par $u = (1, 2)$.

Plus généralement, soit $u = (a, b)$ un vecteur non nul du plan $\mathbb{R}^2$. Donner un système d'équation cartésienne de la droite $\text{Vect}(u)$. (On pourra deviner une équation non nulle satisfaite par les composantes de u, puis vérifier que cette équation définit bien la droite $\text{Vect}(u)$.)

(b) Donner un système d'équation cartésienne du plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\{(1, 0, 2), (-1, 2, 0)\}$.

(c) Donner un système d'équations cartésiennes de la droite de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1, 2, -1)$. (Comme en (a), on pourra deviner deux équations différentes satisfaites par les composantes de u, puis vérifier que ce système d'équations définit bien la droite $\text{Vect}(u)$.)

Exercice 12 Systèmes d'équations cartésiennes dans $\mathbb{R}^4$.

Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs

$$u_1 = (1, -2, 1, -2), u_2 = (1, 1, 2, 2), u_3 = (2, -1, 3, 0), u_4 = (0, 3, 1, 4).$$

(a) Déterminer le rang de la suite (u_1, u_2, u_3, u_4) puis un système d'équations cartésiennes du sous-espace $E = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

(b) Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } (x, y, z, t) \in E \text{ et } x + 2y - z - t = 0, x - y - z + t = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel, et en donner deux systèmes d'équations cartésiennes: un contenant 4 équations linéaires, un autre contenant 3 équations linéaires.

Exercice 13 Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs

$$v_1 = (1, -1, 2, 0), v_2 = (0, 2, 1, 1), v_3 = (1, 1, 3, 1), v_4 = (2, 0, 5, 1).$$

(a) La suite (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle libre ?

(b) Soit $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$. Déterminer la dimension de F et une base de F. En déduire le rang de la suite (v_1, v_2, v_3, v_4).

(c) Donner un système d'équations caractérisant F.

(d) Trouver un supplémentaire de F.