Fiche de TD numéro 4. Sous-espaces vectoriels :
bases, systèmes d'équations linéaires, intersection et sommes, sous-espaces supplémentaires.

Exercice 1 Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $v_1 = (1,-1,0,2)$, $v_2 = (1,0,1,2)$, $v_3 = (1,3,5,7)$ et $v_4 = (0,2,3,a)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

(a) Pour quelles valeurs de a la suite $V = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est-elle une base ?

(b) Pour les valeurs de a où V est liée, quelles sont les relations de dépendance linéaire entre ses vecteurs ?

(c) Quelle est la dimension de $E = \mathrm{Vect}(V)$ selon les valeurs de a ?

(d) Soit $k \in \mathbb{R}$. Soit $e = (4, k, 1, 3)$. Pour les valeurs de a où V est liée, quelles sont les valeurs de k telles que $e \in F$?

(e) Pour ces valeurs de k et de a, exprimer e en fonction de v_1, v_2, v_3 et v_4.

(f) Quand est-ce que $e \in F$ pour les valeurs de a où V est libre ? Donner les coordonnées de e dans V.

Exercice 2 Suite échelonnée et pivot.

(1) On considère la suite de vecteurs (u_1, u_2, u_3, u_4) de $\mathbb{R}^4$ donnée par :

$$u_1 = (2,0,0,0), u_2 = (-1,4,0,0), u_3 = (0,2,3,0), u_4 = (1,0,0,-2)$$

Montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.

(Si on écrit ces vecteurs en colonne, le système correspondant est échelonné, on dit donc que la suite est échelonnée.)

(2) Soit (v_1, v_2, v_3, v_4) une suite de vecteurs $\mathbb{R}^4$.

(2-a) Montrer que si les premières coordonnées de v_1, v_2, v_3 et v_4 sont nulles, alors la suite (v_1, v_2, v_3, v_4) est liée.

(2-b) Si la première composante de v_1 est non nulle, et si a_1, a_2, a_3, a_4 désignent les premières composantes de v_1, v_2, v_3, v_4 on pose :

$$v_2' = v_2 - \frac{a_2}{a_1} v_1, v_3' = v_3 - \frac{a_3}{a_1} v_1, v_4' = v_4 - \frac{a_4}{a_1} v_1$$

(vecteurs obtenus par des opérations de type "pivot")

Montrer que $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2', v_3', v_4')$. Quelles sont les premières composantes de v_2', v_3', v_4' ? Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) la suite (v_2', v_3', v_4') est libre ;
(2) la suite (v_1, v_2', v_3', v_4') est libre ;
(3) la suite (v_1, v_2, v_3, v_4) de départ est libre.

(3) En utilisant des opérations de type pivot, montrer que

$$\mathcal{B} = ((1,-2,0,-1), (-2,5,-1,2), (0,-1,5,2), (-1,2,2,6))$$

est une base. En utilisant une seconde série d'opérations de type pivot trouver les coordonnées de chaque vecteur de la base canonique dans la base $\mathcal{B}$, et en déduire les coordonnées dans $\mathcal{B}$ d'un vecteur $u = (x, y, z, t)$.

Exercice 3 Soit $E \subset \mathbb{R}^5$ un sous-espace vectoriel.

(a) Que dire de $\dim(E)$?

(b) Dans cette question on suppose que E est engendré par une suite (u_1, u_2, u_3). Montrer que toute suite de 4 vecteurs de E est liée.

(c) Dans cette question on suppose que E contient une suite libre (v_1, v_2, v_3). Montrer qu'aucune partie de E à 2 éléments n'est génératrice.

Exercice 4 Soient E, F, G, H des sous-espaces vectorielsde $\mathbb{R}^4$. On suppose que $E \subset F \subset G \subset H$, et de plus $E \neq \{0\}, H \neq \mathbb{R}^4$. Montrer que deux des sous-espaces sont égaux.

Exercice 5 Base incomplète.

Soit $u_1 = (1, 1, 1, 2), u_2 = (0, 1, 2, -1), u_3 = (1, 3, 5, 0)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$, et soit $E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.

(a) Donner une base $\mathcal{B}$ de E et la dimension de E. Si $u \notin E$ est-il possible de compléter $\mathcal{B}$ en une base de $\mathbb{R}^4$ dont le troisième vecteur est u ? Donner un exemple de vecteurs u, v tels que (u, v) est libre mais il est impossible de compléter $\mathcal{B}$ en une base de $\mathbb{R}^4$ ayant comme troisième et quatrième vecteur u et v.

(b) En utilisant des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$, compléter $\mathcal{B}$ en une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^4$. Si on note (y_1, y_2, y_3, y_4) les coordonnées d'un vecteur u dans la base $\mathcal{B}'$, montrer que $u \in E \iff y_3 = y_4 = 0$.

(c) Déterminer les coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$. En déduire un *système d'équations cartésiennes de* E dans les coordonnées canoniques (i.e. un système linéaire (S) à 4 inconnues, tel qu'un vecteur $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ appartient à E si et seulement si (x_1, x_2, x_3, x_4) est solution de (S)).

Exercice 6 Systèmes d'équations cartésiennes dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

(a) Donner un système d'équation cartésienne de la droite du plan $\mathbb{R}^2$ engendrée par $u = (1, 2)$.

Plus généralement, soit $u = (a, b)$ un vecteur non nul du plan $\mathbb{R}^2$. Donner un système d'équation cartésienne de la droite $\mathrm{Vect}(u)$. (On pourra deviner une équation non nulle satisfaite par les composantes de u, puis vérifier que cette équation définit bien la droite $\mathrm{Vect}(u)$.)

(b) Donner un système d'équation cartésienne du plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\{(1, 0, 2), (-1, 2, 0)\}$.

(c) Donner un système d'équations cartésiennes de la droite de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1, 2, -1)$. (Comme en (a), on pourra deviner deux équations différentes satisfaites par les composantes de u, puis vérifier que ce système d'équations définit bien la droite $\mathrm{Vect}(u)$.)

Exercice 7 Systèmes d'équations cartésiennes dans $\mathbb{R}^4$.

Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs $u_1 = (1, -2, 1, -2), u_2 = (1, 1, 2, 2), u_3 = (2, -1, 3, 0), u_4 = (0, 3, 1, 4)$.

(a) Déterminer le rang de la suite (u_1, u_2, u_3, u_4) puis un système d'équations cartésiennes du sous-espace $E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

(b) Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } (x, y, z, t) \in E \text{ et } x + 2y - z - t = 0, x - y - z + t = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel, et en donner deux systèmes d'équations cartésiennes: un contenant 4 équations linéaires, un autre contenant 3 équations linéaires.

Exercice 8 Intersection de plans en dimension 3.

Soit $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x+2y-3z = 1\}$. Pour a, b, c, d des paramètres réels avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, soit $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ ax + by + cz = d\}$. On pose $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y - 3z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ ax + by + cz = 0\}$.

(a) Montrer que E et F sont des plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

(b) Montrer que $E \cap F$ est une droite vectorielle, sauf si (a, b, c) est colinéaire à $(1, 2, -3)$. Dans ce dernier cas, que dire de $E \cap F$?

(c) On considère le système linéaire

$$(S)\quad \begin{cases} x+2y-3z &= 1 \\ ax+by+cz &= d \end{cases}$$

Suivant que $E\cap F$ est une droite vectorielle ou non, résoudre (S), et en déduire la nature de $P\cap Q$.

Exercice 9 Soit $E=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\ y+z+t=0\}$ et $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\ x+y=0 \text{ et } z=2t\}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
(a) Déterminer la dimension et une base de E et F.
(b) Trouver la dimension et une base de $E\cap F$.
(c) Que peut-on dire de $E+F$? La somme est-elle directe ?

Exercice 10 Pour chaque paire de ces sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, donner la somme et dire si elle est directe :
$E_1=\mathrm{Vect}(1,0,1,0),(5,-1,6,0))$;
$E_2=\mathrm{Vect}((0,3,4,4),(-1,1,2,4))$;
$E_3=\mathrm{Vect}((1,1,2,0),(1,2,3,0),(3,1,4,0))$;
$E_4=\mathrm{Vect}((1,1,0,0),(1,3,2,4),(0,1,1,2))$.

Exercice 11
On considère le sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^4$ défini par $E=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\ 2x-2y-z+t=0\}$.
(a) Déterminer la dimension de E et une base de E.
(b) Déterminer un supplémentaire de E.

Exercice 12 Soit $v_1=(1,-1,2,0)$, $v_2=(0,2,1,1)$, $v_3=(1,1,3,1)$ et $v_4=(2,0,5,1)$ des vecteurs dans $\mathbb{R}^4$.
(a) Les vecteurs v_1, v_2, v_3 et v_4 sont-ils linéairement indépendants ?
(b) Soit $F=\mathrm{Vect}(v_1,v_2,v_3,v_4)$. Déterminer la dimension de F et une base de F. En déduire le rang de la famille $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$.
(c) Donner un système d'équation caractérisant F.
(d) Trouver un supplémentaire de F.

Exercice 13 Soit donné les vecteurs suivant de $\mathbb{R}^5$: $v_1=(3,2,3,-1,2)$, $v_2=(1,2,1,-1,-2)$, $v_3=(1,-6,1,3,14)$, $e_1=(3,4,3,-2,-2)$, $e_2=(-2,-3,-3,1,2)$, $e_3=(2,1,-3,-3,2)$. Soit E l'espace vectoriel engendré par v_1,v_2 et v_3. De même, soit $F=\mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3)$.
(a) Trouver une base et la dimension de E.
(b) Même question pour F.
(c) Déterminer la dimension et une base de $E\cap F$.
(d) E et F sont-ils en somme directe ? En déduire la dimension de $E+F$.
(e) Donner une base de $E+F$.
(f) Donner un supplémentaire de E,F et $E+F$.