Fiche de TD numéro 5. Applications linéaires, matrices.

Exercice 1 Produit de matrices.
Calculer, lorsque cela est possible, le produit AB, pour :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$\text{et } B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 Une loi d'évolution.

(1) Montrer que le vecteur (x_n, y_n) suit la loi d'évolution suivante :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Dans la suite on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(2) Vérifier la relation suivante :

$$A^2 = 3A - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exprimer de même A^3 en fonction de A et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(3) Vrifier que si $xA + yI_2 = x'A + y'I_2$ alors $x = x'$ et $y = y'$.

(4) En dduire que pour tout entier $n \geq 2$ il existe un unique couple d'entiers (a_n, b_n) tels que $A^n = a_n A - b_n I_2$. Donner une formule de rcurrence permettant de calculer (a_{n+1}, b_{n+1}) en fonction de (a_n, b_n). Ecrire la relation obtenue sous forme matricielle.

Exercice 3 Noyau et image d'une matrice.
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Déterminer le rang de A, une base de $\mathrm{Im}(A)$ et une base de $\mathrm{Ker}(A)$.
Mêmes questions avec

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 Sous-espaces associs un systme linaire.

On considre le systme linaire

$$(S)\begin{cases}2x+y-2z & =0\\ x+3y+z & =0\\ 3x-y-5z & =0\end{cases}$$

(1) Montrer que l'ensemble des solutions de (S) est un sous-espace vectoriel, et en dterminer une base.

(2) Soit E l'ensemble des vecteurs u tels que l'équation $AX=U$ admet une solution (où U désigne la colonne correspondant à u). Montrer que E est un sous-espace vectoriel, et en donner une base.

Exercice 5 Différentes matrices d'une même application linéaire.
On considère l'application $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y,z)=(x+y-z,x-y+2z)$$

(1) Vérfier que f est une application linéaire.
(2) Donner la matrice de $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ quand on munit $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ de leurs bases canoniques $\mathcal{B}^3,\mathcal{B}^2$.
(3) Déterminer $\mathrm{rg}(f)$, une base de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
(4) Montrer qu'il existe des vecteurs u_1,u_2,u_3 de $\mathbb{R}^3$ tels que $f(u_1)=(1,,0),f(u_2)=(0,1)$ et $f(u_3)=(0,0)$. Vérifier que (u_1,u_2,u_3) est une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$, puis déterminer $\mathrm{Mat}(f,\mathcal{B}'\to\mathcal{B}^2)$.
(5) Vérifier que $\mathcal{B}''=((1,-1),(2,3))$ est une base de $\mathbb{R}^2$, puis déterminer $\mathrm{Mat}(f,\mathcal{B}^3\to\mathcal{B}'')$.

Exercice 6 Différentes applications linéaires ayant même matrice.
On se donne d'une part la matrice $A=$, et d'autre part les suites $\mathcal{B}=,\mathcal{B}'=$. Enfin on note $\mathcal{B}^3$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soient $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ les applications linéaires telles que $\mathrm{Mat}(f,\mathcal{B}^3\to\mathcal{B})=A,\mathrm{Mat}(g,\mathcal{B}^3\to\mathcal{B}')=A,\mathrm{Mat}(h,\mathcal{B}\to\mathcal{B}')=A$.
Pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ calculer $f(x,y,z),g(x,y,z)$ et $h(x,y,z)$.
Comparer $\mathrm{rg}(f),\mathrm{rg}(g)$ et $\mathrm{rg}(h)$, puis les dimensions de $\mathrm{Ker}(f),\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Ker}(h)$.

Exercice 7
Déterminer les valeurs du paramètre a pour lesquelles le noyau et l'image sont supplémentaires.

Exercice 8

Exercice 9 Matrice inversible, calcul de l'inverse.
On considère la matrice carrée

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\1&2&0&-1\\0&1&-1&2\\2&-1&1&0\end{pmatrix}$$

En résolvant l'équation

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$$

montrer que A est inversible et donner son inverse.