

Devoir numéro 4.

A rendre le 21 mai.**Exercice 1**

On considère les suites numériques

$$u_n = \ln(2^{2n} + n2^n), \quad v_n = n \ln(1 + n^{\frac{3}{2}} + n^2) - 2 \ln((n+1)^n)$$

- (a) Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.
- (b) Donner des équivalents simples de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (c) Que vaut $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$? Justifier que, pour tout n assez grand, on a $v_n \leq u_n$.

Exercice 2

On considère la fonction

$$f(x) = \frac{\exp\left(\frac{1}{1+x^2}\right) - 1}{\cos\left(\frac{1}{1+x}\right) - 1}$$

et on pose $u_n = f(n)$.

- (a) Montrer que u_n converge et donner sa limite ℓ .
- (b) Montrer que $u_n - \ell \sim \frac{a}{n^k}$, pour certaines constantes $a \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$ qu'on déterminera.