Orsay 2008-2009 IFIPS S2 Mathématiques (M160).

Devoir numéro 3.

A rendre EN COURS le lundi 27 Avril.

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z, t) = (x - z, -x + y - z + t, x - 2y + 2z - t, -x - y + 2z).$$

(a) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$? En déterminer une base. L'image et le noyau de f sont-ils supplémentaires ?

(b) Donner une matrice ligne L telle que $LA = 0$. En déduire une équation cartésienne de $\mathrm{Im}(f)$.

(c) Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1 = (1, 0, 0, 0), u_2 = (1, 1, 0, 0), u_3 = (1, 1, 1, 0), u_4 = (1, 1, 1, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Calculer $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}' \to \mathcal{B})$.

Exercice 2

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -16 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est A.

(a) Déterminer $f(x, y, z, t)$.

(b) Montrer que f est bijective. Calculer l'inverse de A.

(c) Déterminer l'unique vecteur $u = (x, y, z, t)$ tel que $f(u) = (1, 2, -2, 0)$.

(d) Pour $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ on pose $B = AM$ et on note $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques est B.

(d-i) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(B)$ et une base de $\mathrm{Ker}(B)$. Vérifier que $\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Ker}(M)$.

(d-ii) Montrer que $E = \mathrm{Vect}((1, 1, 1), (1, -1, 1))$ est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(M)$ dans $\mathbb{R}^3$, et que $g(E) = \mathrm{Im}(B)$.

(d-iii) Résoudre l'équation $g(u) = v$ pour $v = (1, -2, 3, -1)$, puis $v = (0, 7, 4, -30)$. Montrer que dans le deuxième cas il y a une et une seule solution u dans E.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z, t) = (-2x - y + t, -x + z + 2t, y + 2z + 3t, x + 2y + 3z + 4t).$$

(a) Donner la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

(b) Montrer que $\mathcal{B}' = ((-2, 6, -2, 1), (3, -4, 4, -1), (8, 5, -2, 3), (2, 2, -1, 1))$ est une base. Calculer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$.

(c) Déterminer les coordonnées dans $\mathcal{B}'$ du vecteur $(1, 2, 3, 4)$.

(d) Donner la matrice A' de f dans $\mathcal{B}'$.