

Devoir numéro 2. A rendre en TD la semaine du 15 Mars.

Exercice 1

On considère l'ensemble $V \subset \mathbb{R}^3$ suivant :

$V = \{v \in \mathbb{R}^3 \text{ de la forme } v = (2x + y + z + t, x - y - 2z, x + 2y + 3z + t), \text{ avec } x, y, z, t \text{ réels}\}$.

- (1) Montrer que V est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 et en donner une partie génératrice.
- (2) Déterminer une base de V et montrer que V est un plan de \mathbb{R}^3 .
- (3) Compléter une base de V en une base de \mathbb{R}^3 et déterminer un supplémentaire de V dans \mathbb{R}^3 .
- (4) Montrer qu'un vecteur (a, b, c) de \mathbb{R}^3 appartient à V si et seulement si (a, b, c) vérifie une équation linéaire (en a, b, c) qu'on précisera.

Exercice 2

Soit $V \subset \mathbb{R}^4$ l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} x + 3y - 2z - 3t = 0 \\ 2x - z = 0 \\ 3x + y - 2z - t = 0 \end{cases}$$

- (1) Montrer que V est un plan vectoriel et en donner une base.
- (2) Soit $W = \text{Vect}((0, 1, 3, 1), (-1, -1, 1, 0), (1, 2, 2, 1))$.
- (2-a) Donner une base de $V \cap W$. Quelle est la dimension de $V + W$?
- (2-b) Déterminer un supplémentaire de $V + W$ dans \mathbb{R}^4 .

Exercice 3

Etant donné un paramètre $a \in \mathbb{R}$ on considère les vecteurs

$$v_1 = (a, 1, -a, 1), v_2 = (a, 3, 3a - 2, 3), v_3 = (a, 4, 5a - 3, 4), v_4 = (a, 1, 2a - 1, 1)$$

et on note V le sous-espace vectoriel engendré par v_1, v_2, v_3, v_4 .

Selon les valeurs du paramètre a :

- (1) déterminer le rang de la suite (v_1, v_2, v_3, v_4) et donner une base de V ;
- (2) déterminer un supplémentaire W de V et donner une base de W ;
- (3) déterminer un système d'équations cartésiennes de V .