Orsay 2008-2009 IFIPS S2 Mathématiques (M160).

Devoir numéro 2. A rendre en TD le 19 Mars.

Exercice 1
On considère l'ensemble $V \subset \mathbb{R}^3$ suivant :

$$V = \{v \in \mathbb{R}^3 \text{ de la forme } v = (x+z+2t, y+z-t, x-y+3t), \text{ avec } x, y, z, t \text{ réels } \}.$$

(1) Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une partie génératrice.
(2) Déterminer une base de V et montrer que V est un plan de $\mathbb{R}^3$.
(3) Compléter une base de V en une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer un supplémentaire de V dans $\mathbb{R}^3$.
(4) Montrer que $(a, b, c) \in V$ si et seulement si (a, b, c) vérifie une équation linéaire (en a, b, c) qu'on précisera.

Exercice 2
Soit $V \subset \mathbb{R}^4$ l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} x - y + t = 0 \\ x + y - z - t = 0 \\ 3x - y - z + t = 0 \end{cases}$$

(1) Montrer que V est un plan vectoriel et en donner une base.
(2) Soit $W = \mathrm{Vect}\big((1, 2, 0, -1), (1, 1, -1, 0), (-1, 0, 2, -1)\big)$.
(2-a) Donner une base de $V \cap W$. Quelle est la dimension de $V + W$?
(2-b) Déterminer un supplémentaire de $V + W$ dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3
Etant donné un paramètre $a \in \mathbb{R}$ on considère les vecteurs

$$v_1 = (a, 2, a-1, 2), v_2 = (2a, 3, -1, 3), v_3 = (-a, 0, 3a-1, 0), v_4 = (5a, 7, 2a-3, 7)$$

et on note V le sous-espace vectoriel engendré par v_1, v_2, v_3, v_4.

Selon les valeurs du paramètre a :
(1) déterminer le rang de la suite (v_1, v_2, v_3, v_4) et donner une base de V ;
(2) déterminer un supplémentaire W de V et donner une base de W ;
(3) déterminer un système d'équations cartésiennes de V.