Devoir numéro 1. A rendre en TD le 9 février au plus tard.

Exercice 1 : Aire d'un domaine plan.
On considère le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+y \leq 3,\ 2y - x \leq 3,\ x^2 \leq 4y\}$.
Représenter D, puis calculer l'aire de D.

Exercice 2 : Intégrales doubles.
On veut calculer l'intégrale $I = \int_D xydxdy$ avec :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

(a) On considère les domaines

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq 1,\ y \geq 0,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\},$$
$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 1 \leq x \leq 2,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Calculer $I_1 = \int_{D_1} xydxdy$, puis $I_2 = \int_{D_2} xydxdy$. En déduire la valeur de I.
(b) Recalculer I en utilisant les coordonnées polaires..

Exercice 3 : Volume.
Calculer le volume du solide S, avec $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 4z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Exercice 4 : Comparaison d'intégrales.
On considère la fonction

$$f(x,y) = e^{\left(1+x+y+e^{-\sin(xy)}\right)}$$

sur le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y - x \leq \frac{1}{2}\}$.
(a) Donner le signe de $\sin(xy)$ pour $(x,y) \in D$ et montrer que pour $(x,y) \in D$ on a

$$e^{1+x+y} \leq f(x,y) \leq e^{2+x+y}$$

(b) En déduire un encadrement de $\int_D f(x,y)dxdy$.

Exercice 5 : Equations différentielles.
Résoudre les équations différentielles suivantes (on donnera d'abord la solution générale de l'équation linéaire homogène associée) :
(a) $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = e^{-x}$
(b) $y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = xe^{3x}$
(c) $y''(x) + 2y'(x) + 4y(x) = 13\sin x$ (on pourra chercher une solution particulière de la forme $A\cos x + B\sin x$)