Devoir n°1 : le théorème de Desargues.
(à rendre le 25 Octobre)

Dans la suite a, b, c, a', b', c' désignent six points distincts d'un plan affine E (avec a, b, c non alignés). On suppose que les paires de droites $\big((ab),(a'b')\big)$, $\big((ac),(a'c')\big)$, $\big((bc),(b'c')\big)$ sont sécantes en c'', b'', a'' respectivement (en particulier $(ab) \neq (a'b')$, $(ac) \neq (a'c'), (bc) \neq (b'c')$).

Le but du problème est de démontrer le théorème de Desargues : si les trois droites $(aa'), (bb'), (cc')$ sont parallèles ou concourantes, alors les points a'', b'', c'' sont alignés.

On introduit le repère affine $\mathcal{R} = (a, b, c)$. On note $(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2), (\gamma_1, \gamma_2)$ les coordonnées de $\overrightarrow{aa'}, \overrightarrow{bb'}, \overrightarrow{cc'}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{R}}$.

1) Montrer que les droites $(aa'), (bb'), (cc')$ sont deux à deux distinctes.

2) Pour chacune des droites $(a'b'), (a'c'), (b'c')$, donner une équation cartésienne dans $\mathcal{R}$.

3) Déterminez les coordonnées des points a'', b'', c''.

4) Soit trois droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ de E, d'équations cartésiennes $a_1x + b_1y + c_1 = 0, a_2x + b_2y + c_2 = 0, a_3x + b_3y + c_3 = 0$ dans $\mathcal{R}$. Montrer que $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ sont parallèles ou concourantes (i.e. ont même direction ou passent par un même point) si et seulement si $\det M = 0$, avec $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ (si $\det M = 0$ on pourra considérer un vecteur colonne X tel que $M.X = 0$, puis discuter suivant X).

5-a) Déterminez des équations cartésiennes dans $\mathcal{R}$ des droites $(aa'), (bb'), (cc')$. Puis calculer $\delta = \det M$ (cf. question 4).

-b) Exprimer $\det_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}(\overrightarrow{b''c''}, \overrightarrow{b''a''})$ en fonction des quantités $\delta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, D_i$ $(i = 1, 2, 3)$, avec $D_1 = \det_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}(\overrightarrow{aa'}, \overrightarrow{bb'}), D_2 = \det_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}(\overrightarrow{bb'}, \overrightarrow{cc'}), D_3 = \det_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}(\overrightarrow{cc'}, \overrightarrow{aa'})$.

-c) Conclure.

coordonnées de a' : (α_1, α_2),
coordonnées de b' : $(1+\beta_1, \beta_2)$,
coordonnées de c' : $(\gamma_1, 1+\gamma_2)$,
équation de $(a'b')$: $x(\alpha_2 - \beta_2) - y(\alpha_1 - \beta_1 - 1) + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 - \alpha_2 = 0$
équation de $(a'c')$: $x(\alpha_2 - \gamma_2 - 1) - y(\alpha_1 - \gamma_1) + \alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1 + \alpha_1 = 0$
équation de $(b'c')$: $x(\beta_2 - \gamma_2 - 1) - y(1 + \beta_1 - \gamma_1) + 1 + \beta_1 + \gamma_2 + \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 = 0$