ESPACE $\mathbb{R}^n$, MATRICES ET SYSTÈMES LINÉAIRES.

Table des matières

Remarque : je signale l'excellent site http ://wims.unice.fr/wims/ .

1. L'ensemble $\mathbb{R}^n$, ses éléments et ses parties.

En considérant deux points distincts Ω, I sur une droite, on peut repérer tout point M de la droite par un nombre réel - l'abscisse de M dans le repère (Ω, I). Ainsi une droite correspond à l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ; $\mathbb{R}$ est le modèle de toutes les droites.

En considérant deux axes dans un plan, supposés perpendiculaires en un point Ω, on peut repérer tout point du plan par ses deux projections sur les axes. Une fois des repères (Ω, I) et (Ω, J) choisis sur chacun des axes, les projections du point sont repérés par un nombre réel, donc le point est repéré par un couple de réels. Ainsi un plan correspond à l'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ des couples de nombres réels ; $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est le modèle de tous les plans.

De même (par projection sur trois axes perpendiculaires rapportés à des repères), l'espace usuel correspond à l'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ des triplets de nombres réels ; $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est le modèle de l'espace.

Pour simplifier on note $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$.

Définition 1.1. Soit n un entier fixé mais indéterminé, $n \geq 1$. On note $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-uplets de réels, autrement dit $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble de toutes les suites possibles $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où chaque x_i est réel. Les éléments de $\mathbb{R}^n$ seront appelés des *n-vecteurs*, ou plus simplement des *vecteurs*. Les *composantes* d'un n-vecteur $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont les nombres $x_1, \ldots, x_n$. Pour tout n-vecteur u, et pour chaque entier i, $0 \leq i \leq n$, on notera $x_i(u)$ la i-ème composante de u.

On pensera à un n-vecteur comme à un meuble à n tiroirs ; ou alors à un ensemble de n informations unidimensionnelles. Par exemple quand on fait un certain (grand) nombre n de mesures de natures différentes, on peut ranger toutes les observations dans un n-vecteur. Formellement un n-vecteur est identique à une fonction de l'ensemble fini $\{1, 2, \ldots, n\}$ vers $\mathbb{R}$.

Date: 18 mars 2010.

Exemple 1.2 (quelques vecteurs particuliers)**.** Le vecteur *nul*, c'est à dire dont toutes les composantes sont nulles, autrement dit $(0,0,\dots,0)$, noté 0 ou parfois $0_{\mathbb{R}^n}$.

Si n est fixé (quoique pas précisé) on peut considérer le vecteur e_1 dans $\mathbb{R}^n$ défini par $e_1 = (1,0,\dots,0)$: toutes les composantes sont nulles sauf la première qui vaut 1.

Plus généralement e_k est le vecteur dans toutes les composantes sont nulles, sauf la k-ième qui vaut 1.

Par exemple dans $\mathbb{R}^2$ on a $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$. Dans $\mathbb{R}^3$ on a $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$. Dans $\mathbb{R}^4$ on a $e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0), e_3 = (0,0,1,0), e_4 = (0,0,0,1)$. Et ainsi de suite.

La notation e_1 n'est ambiguë que si on n'a pas précisé la taille des n-vecteurs considérés.

Pour $n = 2,3,4$ au lieu d'écrire les composantes $x_1, x_2, \dots$ on utilise plutôt les notations : (x,y), (x,y,z), (x,y,z,t).

Pour que deux n-vecteurs u, v soient égaux il est nécessaire et suffisant qu'il aient mêmes composantes.

2. Systèmes d'équations linéaires à n inconnues : définitions.

En algèbre linéaire, il est indispensable de savoir résoudre un système d'équations linéaires : c'est un outil constamment utilisé, car on ramène les équations vectorielles à des systèmes d'équations linéaires.

Exemple 2.1.

$$\begin{cases} 2x - y &= 0 \\ x - 3y &= 0 \end{cases}, \begin{cases} 2x - y &= 1 \\ x - 3y &= 2 \end{cases}, \begin{cases} x + y - 2z &= 1 \\ -x + 2y + z &= 0 \end{cases}, \begin{cases} 4x + 3y + 2z + t &= 0 \\ 3x + 2y + z &= 4 \\ 2x + y + 4t &= 3 \\ x + 4z + 3t &= 2 \\ 2y - z + t &= -1 \end{cases}$$

Mais on va étudier des systèmes généraux, à un nombre n d'inconnues, n n'étant pas déterminé. Ces systèmes seront linéaires comme dans les exemples, constitués de p équations, p indéterminé, et avec des coefficients eux aussi indéterminés. Notre but est de trouver des règles générales pour résoudre les systèmes linéaires. La difficulté viendra de ce qu'on manipulera dans le cours des objets plus abstraits que dans les exemples, puisque pas explicites.

Définition 2.2 (matrices)**.** Soit $p \geq 1$ et $n \geq 1$ deux nombres entiers. Une *matrice réelle $p \times n$* (ou : *à p lignes et n colonnes*) est un tableau rectangulaire de nombres réels (appelés les *coefficients* de la matrice), ayant p lignes et n colonnes. Pour $p = 1$ on parle de matrice-ligne, pour $n = 1$ de matrice-colonne. On note $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les matrices réelles à p lignes et n colonnes.

On note souvent $(a_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$ une matrice à p lignes et n colonnes : cela signifie que le coefficient de la matrice situé à la i-ème ligne et à la j-ème colonne est a_{ij}.

La *i-ème ligne de A* est la (matrice) ligne $A = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$, la *$j$-ème colonne* est $A = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{pj} \end{pmatrix}$.

Exemple 2.3. $p = 2, n = 2$; $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. Dans ce cas $a_{11} = 2, a_{21} = 1, a_{12} = -1, a_{22} = -3$. La première ligne est $\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$, la deuxième colonne est $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Autre exemple, avec $p = 5$ et $n = 4$, puis $p = 5, n = 1$: $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

En fait ces matrices sont tirées des premier et dernier systèmes dans les exemples ci-dessus. Pour définir un système linéaire on procède dans l'autre sens : on prend des matrices et on fabrique avec elles un système.

Définition 2.4 (systèmes linéaires à n inconnues)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pn} \end{pmatrix}$ une matrice $p \times n$ et soit $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_p \end{pmatrix}$ une matrice colonne à n lignes.

Alors le *système linéaire* à n inconnues de matrice A et de second membre B est

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \cdots & \cdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n & = b_p \end{cases}.$$

Les *inconnues* sont $x_1, \ldots, x_n$.
Les différentes *lignes* du système (S) sont $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$, $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$, etc... Nous noterons $(L_1), \ldots, (L_p)$ les lignes, qui sont chacune des équations linéaires aux inconnues $x_1, \ldots, x_n$.

Une *solution* est un n-vecteur $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ qui vérifie chaque ligne du système, c'est à dire tel que $a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \cdots + a_{1n}s_n = b_1, a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \cdots + a_{2n}s_n = b_2, \ldots, a_{p1}s_1 + a_{p2}s_2 + \cdots + a_{pn}s_n = b_p$.

Nous noterons toujours $\mathrm{Sol}(S)$ l'ensemble de tous les n-vecteurs $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ solutions du système (S).

Enfin le système (S) est dit *compatible* lorsque $\mathrm{Sol}(S)$ est non vide, et *incompatible* si $\mathrm{Sol}(S)$ est vide.

Remarque : quand le système est homogène, il y a toujours au moins la solution nulle. Autrement dit un système homogène est toujours compatible.

Un exemple de système incompatible : $\begin{cases} x + y & = 1 \\ x + y & = 2 \end{cases}$

Problème : déterminer l'ensemble de toutes les solutions.

3. Un cas favorable : les systèmes triangulaires et apparentés.

3.1. **Systèmes triangulaires.**

Exemple : $\begin{cases} x + y + z & = 1 \\ \quad\ y - 2z & = 3 \\ \qquad\quad z & = -1 \end{cases}$

Définition 3.1 (systèmes triangulaires)**.** Le système linéaire à n inconnues

$$(S)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \cdots & \cdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n & = b_p \end{cases}$$

est dit *triangulaire* lorsque

(1) $p = n$ (autant d'équations que d'inconnues)
(2) Les coefficients $a_{21}, \ldots, a_{n1}$ sont nuls et plus généralement pour tout $i = 1, \ldots, n$, tous les coefficients $a_{i+1i}, \ldots, a_{ni}$ sont nuls.

Donc le système est triangulaire ssi la matrice A du système est de taille $n \times n$ et ne peut avoir de coefficients non nuls que dans le triangle supérieur droit - d'où la terminologie.

Un système triangulaire est dit *de Cramer* si les coefficients *diagonaux* a_{ii} sont *non nuls* (pour tout $i = 1, \ldots, n$).

Le résultat suivant est très utile, quoiqu'immédiat (noter qu'à chaque étape on peut vraiment déterminer s_i car le coefficient a_{ii} est non nul) :

Lemme 3.2 (résolution des systèmes triangulaires de Cramer)**.** *Un système triangulaire de Cramer admet toujours une unique solution $(s_1, \ldots, s_n)$. Précisément :*

(1) *Le nombre s_n est exactement déterminé par la dernière ligne, soit $s_n = -\frac{b_n}{a_{nn}}$.*
(2) *Puis s_{n-1} est exactement déterminé par l'avant-dernière ligne et la valeur de s_n, soit*

$$s_{n-1} = -\frac{b_{n-1} - a_{n-1n}s_n}{a_{n-1n-1}}.$$

(3) *Et ainsi de suite : en remontant dans le système on détermine de proche en proche tous les s_i.*

3.2. **Systèmes triangulaires élargis vers le bas ou vers la droite.**

Exemples :

$$\begin{cases} x + y + z & = 1 \\ \quad\; y - 2z & = 3 \\ \qquad\quad z & = -1 \\ \qquad\quad 0 & = -3 \end{cases}$$ (une équation en plus que dans un système triangulaire) ou $$\begin{cases} x + y + z + t & = 1 \\ \quad\; y - 2z - t & = 3 \\ \qquad\quad z + 2t & = -1 \end{cases}$$

(une inconnue en plus que dans un système triangulaire)

Définition 3.3 (systèmes triangulaires élargis)**.** Le système linéaire à n inconnues

$$(S)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \cdots & \cdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n & = b_p \end{cases}$$

est dit *triangulaire élargi* lorsque les coefficients $a_{21}, \ldots, a_{p1}$ sont nuls et plus généralement pour tout $i = 1, \ldots, \min(p, n)$, tous les coefficients $a_{i+1i}, \ldots, a_{pi}$ sont nuls.

Le système (S) est *triangulaire élargi vers le bas* si $p \geq n$, et (S) est *triangulaire élargi vers la droite* si $p \geq n$.

Les *coefficients diagonaux* sont les $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{\min(p,n),\min(p,n)}$.

Lemme 3.4 (résolution des systèmes linéaires triangulaires élargis vers le bas)**.** *Un système linéaire élargi vers le bas* **à coefficients diagonaux non nuls** *est compatible ssi $b_{n+1} = \cdots = b_p = 0$, auquel cas il admet la même unique solution que le système triangulaire (T) associé (obtenu en supprimant les lignes $L_{n+1}, \ldots, L_p$ du système (S)).*

Lemme 3.5 (résolution des systèmes linéaires triangulaires élargis vers la droite)**.** *Un système linéaire triangulaire élargi vers la droite (S) est toujours compatible si ses coefficients diagonaux sont non nuls.*

On obtient les solutions $(s_1, s_2, \ldots, s_p, s_{p+1}, \ldots, s_n)$ comme suit. On prend d'abord pour $s_{p+1}, \ldots, s_n$ n'importe quels nombres réels, puis pour $(s_1, s_2, \ldots, s_p)$ l'unique solution du système triangulaire de Cramer dont la matrice a pour coefficients $(a_{ij})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq p}$, et le second membre est donné par la matrice B' ayant p lignes et une colonne, avec $b'_i = b_i - (\sum_{j=p+1}^{j=n} a_{ij}s_j)$.

Ainsi, pour n'importe quel choix de nombres réels $s_{p+1}, \ldots, s_n$ il existe une unique solution dont les $n-p$ dernières composantes sont $s_{p+1}, \ldots, s_n$.

4. Méthode du pivot.

4.1. **Systèmes équivalents.**

Définition 4.1 (systèmes linéaires équivalents)**.** Soient (S_1) et (S_2) deux systèmes linéaires ayant le même nombre n d'inconnues (mais pas nécessairement le même nombre d'équations).

On dit que les systèmes (S_1) et (S_2) sont *équivalents* si et seulement si $\mathrm{Sol}(S_1) = \mathrm{Sol}(S_2)$, autrement dit si on a l'équivalence :

$$(s_1, \ldots, s_n) \text{ solution de } (S_1) \iff (s_1, \ldots, s_n) \text{ solution de } (S_2).$$

Autrement dit (S_1) et (S_2) sont équivalents lorsque toute solution de (S_1) est solution de (S_2), et toute solution de (S_2) est solution de (S_1).

Plus généralement, si τ est une certaine permutation des inconnues $x_1, \ldots, x_n$, on dit que les systèmes (S_1) et (S_2) sont *équivalents à la permutation τ près* si et seulement si $\mathrm{Sol}(S_2)$ se déduit de $\mathrm{Sol}(S_1)$ par la permutation $(s_1, \ldots, s_n) \mapsto \tau(s_1, \ldots, s_n)$.

Les seules permutation d'inconnues qu'il suffit de considérer sont les échanges de deux inconnues, comme par exemple $(x, y) \mapsto (y, x)$, ou bien $(x, y, z, t) \mapsto (x, t, z, y)$ (voir l'opération "Permutations de colonnes" ci-dessous)

Lorsqu'on cherche à résoudre rigoureusement un système, les seules opérations autorisées sont celles qui transforment un système en un système équivalent (éventuellement à permutation d'inconnues près). Si on travaille par implications, on perd des contraintes sur les inconnues, et on élargit peut-être l'ensemble des solutions.

Exemple 4.2. $\begin{cases} 2x - y &= 0 \\ x - 3y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 3y &= 0 \\ 2x - y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 3y &= 0 \\ \quad 5y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}$

4.2. **Opérations autorisées sur les systèmes d'équations linéaires à n inconnues.**

Voici des opérations simples sur les systèmes qui permettent de graduellement simplifier le système jusqu'à arriver à un système immédiat à résoudre (par exemple un système triangulaire élargi à droite). L'intérêt de ces opérations, c'est qu'elles font toujours passer d'un système (S) à un système (S') équivalent (ou équivalent à une permutation de deux inconnues près), donc la résolution de (S') permet la résolution de (S).

A chaque fois, l'équivalence du système (S') au système (S) est justifiée par la donnée d'une opération inverse (toujours de même nature !), qui fait passer de (S') à (S).

Permutations de lignes :
Quand on échange deux lignes (L_i) et (L_j) d'un système (S) on obtient un système (S') équivalent. La matrice A' de (S') s'obtient à partir de la matrice A de (S) en permutant les lignes i et j.
Si on repermute les lignes i et j de (S') on retombe sur (S).

Permutations d'inconnues (ou de colonnes) :
Quand on échange deux inconnues x_i et x_j d'un système (S) on obtient, par définition, un système (S') équivalent à permutation de x_i et x_j près. La matrice A' de (S') s'obtient à partir de la matrice A de (S) en permutant les colonnes i et j.
Si on repermute les inconnues x_i et x_j de (S') on retombe sur (S).
C'est pourquoi la symétrie de $\mathbb{R}^n$

$$(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_{j-1},x_j,x_{j+1},\dots,x_n)\mapsto(x_1,\dots,x_{i-1},x_j,x_{i+1},\dots,x_{j-1},x_i,x_{j+1},\dots,x_n)$$

échange $\mathrm{Sol}(S)$ avec $\mathrm{Sol}(S')$. Donc si on a réussi à résoudre (S') on trouve $\mathrm{Sol}(S)$ en repermutant s'_i et s'_j dans chaque solution $(s'_1,\dots,s'_n)$ de (S').

Multiplication d'une ligne par une constante *non nulle* :
Quand on multiplie une ligne (L_i) d'un système (S) par une constante $\alpha\neq 0$, on obtient un système (S') équivalent. La matrice A' de (S') s'obtient à partir de la matrice A de (S) en multipliant la ligne i par α.
Si on multiplie la ligne i de (S') par $\frac{1}{\alpha}$ on retrouve le système (S) (possible parce que $\alpha\neq 0$!!!)

Ajout à une ligne d'un multiple *quelconque* d'une ligne *différente* :
Quand on multiplie une ligne (L_j) d'un système (S) par une constante $\lambda\in\mathbb{R}$ puis qu'on ajoute la ligne λL_j à une ligne (L_i) *différente* $(i\neq j)$, on obtient un système (S') équivalent. La matrice A' de (S') s'obtient à partir de la matrice A de (S) en multipliant la ligne j par λ et en l'ajoutant à la i-ème ligne.
Si on multiplie la ligne j de (S') par $-\lambda$, qu'on l'ajoute à la i-ème, on retrouve le système (S) (donc inutile d'avoir $\lambda\neq 0$!!!).

4.3. **Méthode du pivot de Gauss pour résoudre un système d'équations linéaires (S) à n inconnues.**
Voici comment "traiter" un système (S) ayant p équations (de matrice A et de second membre B) ; la méthode est par récurrence sur $p\geq 1$.
L'idée de l'algorithme consiste à systématiquement examiner le coefficient en haut à gauche : a_{11}.
(1) **Premier cas :** $a_{11}\neq 0$.
1-a) Ou bien le système (S) n'a qu'une ligne, et dans ce cas les solutions sont :

$$\{(\frac{b_1-a_{12}x_2-\cdots-a_{1n}x_n}{a_{11}},x_2,x_3,\dots,x_n)$$

avec $x_2,x_3,\dots,x_n$ des réels quelconques ;
1-b) Ou bien (S) a au moins deux lignes, dans ce cas on ajoute $-\frac{a_{21}}{a_{11}}\times L_1$ à la ligne L_2, puis $-\frac{a_{31}}{a_{11}}\times L_1$ à la ligne L_3, ... , enfin $-\frac{a_{p1}}{a_{11}}\times L_1$ à la ligne L_p.
Le nouveau système obtenu est équivalent au premier puisqu'on a utilisé ($p-1$ fois) l'opération d'ajout à une ligne L_i d'un multiple d'une autre ligne (L_1).
Et tous les coefficients de x_1 dans les lignes $L_2,L_3,\dots,L_p$ du nouveau système sont nuls.
Alors on considère les lignes $L_2,L_3,\dots,L_p$ comme un système (S') aux inconnues $x_2,\dots,x_n$. Ce système admet $p-1$ équations, donc, par récurrence, on sait déjà le traiter.
Les solutions de (S) sont alors :

$$\{(\frac{b_1-a_{12}x_2-\cdots-a_{1n}x_n}{a_{11}},x_2,x_3,\dots,x_n)$$

avec $(x_2,x_3,\dots,x_n)$ une solution quelconque de (S').

(2) **Deuxième cas :** $a_{11} = 0$.

2-a) Ou bien il existe un coefficient non nul dans la première ligne. Mettons que a_{1j} est le premier coefficient non nul dans L_1 : on permute alors les inconnues x_1 et x_j, ce qui nous donne un système équivalent à permutation près des inconnues x_1 et x_j, et qui de plus se trouve dans le cas (1) - qu'on applique donc.

2-b) Ou bien tous les coefficients devant les inconnues $x_1, \ldots, x_n$ de la première ligne sont nuls. Dans ce cas ou bien $b_1 \neq 0$ et (S) est incompatible, ou bien $b_1 = 0$ et le système est équivalent au système (S') obtenu en effaçant la première ligne. Si (S) n'avait qu'une seule ligne (nulle) on a $\mathrm{Sol}(S) = \mathbb{R}^n$. Sinon comme (S') a une ligne en moins que (S), on peut repartir à l'étape (1).

L'algorithme précédent ou bien assure que (S) est incompatible, ou bien fabrique un système triangulaire élargi à droite avec des coefficients non nuls sur la diagonale. équivalent au système de départ (S) (à une éventuelle permutation des inconnues près) : c'est ce qui permet la résolution.