# COURS DE MATHÉMATIQUES : SUITES NUMÉRIQUES.

Table des matières



## 1. Suites numériques.

1.1. **Définition.** D'abord voici la définition générale d'une suite :

**Définition 1.1** (définition des suites numériques)**.** Une suite numérique est constituée d'une infinité de termes, tous des nombres réels, et l'ensemble de tous ces termes est considéré dans un certain ordre. Formellement :

Une *suite numérique* est une fonction $u : \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\} \to \mathbb{R}$, ou plus généralement $u : \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots\} \to \mathbb{R}$ pour un certain entier $n_0 \geq 0$. On note $u_n$ plutôt que $u(n)$, c'est le *terme de rang $n$ de la suite*. Et on note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite, plutôt que $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ - ou alors $(u_n)_{n\geq n_0}$ si la suite n'est définie qu'à partir du rang $n_0$. (On peut aussi noter la suite par la succession de ses valeurs : $(u_0, u_1, u_2, \ldots)$.)

Une suite est *constante* si elle ne prend qu'une seule valeur.

---

*Date*: 22 mai 2009.

**Exemple 1.2** (un cas particulier essentiel)**.**

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction (même pas forcément supposée continue sur $\mathbb{R}^+$ !). On obtient une *suite numérique* en posant $u_n = f(n)$, pour tout entier naturel $n \geq 0$. L'étude du comportement de la fonction $f$ à l'infini permet de comprendre le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

En fait on autorise aussi les fonctions $f : (a, +\infty[\to \mathbb{R}$, intervalle ouvert ou fermé, et $a \geq 0$ un réel. La suite de terme général $u_n = f(n)$ n'est alors définie qu'à partir de $n = n_0 =$ le plus petit entier supérieur (éventuellement strictement) à $a$.

Ainsi, voici quelques-unes des suites numériques que nous étudierons, ici définies par leur terme général $u_n$ :

$$u_n = 2^{-n}, u_n = 1 + 2n^3, u_n = \frac{n-1}{n+1}, u_n = \sin(\frac{1}{n+1})...$$

**Remarque 1.3** (d'autres suites numériques)**.** Supposons que $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ soit une fonction, et soit $a \in \mathbb{R}$ un réel. On peut alors définir par récurrence une suite $u_n$ par les conditions :

(1) $u_0 = a$ ;

(2) $u_{n+1} = \varphi(u_n)$

Noter que la suite $u_n$ n'a rien à voir avec la suite $\varphi(n)$.

Une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est plus d'information que seulement l'ensemble des valeurs prises par la suite : ce qui compte de façon essentielle c'est dans quel *ordre* ces valeurs sont prises.

Par exemple considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes de rang pair $u_{2k}$ valent 0 et les termes de rang impair $u_{2k+1}$ valent 1. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend exactement 2 valeur (0 et 1), tout comme la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le premier terme vaut 1 et tous les autres termes valent 0. Ces deux suites ne sont pas du tout les mêmes , et elles diffèrent aussi de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes $w_{3k}$ valent 0, les termes $w_{3k+1}$ valent 1, et les termes $w_{3k+2}$ valent 0. Pourtant ici encore les valeurs prises par la suite sont 0 et 1.

**Remarque 1.4** (représentation graphique d'une suite numériques)**.** On peut représenter une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme on représente une fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

On trace un demi-axe horizontal, et un axe vertical. On marque alors pour chaque entier $n$ le point de coordonnées $(n, u_n)$.

**Définition 1.5** (suites monotones)**.** Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *croissante* si $\forall n, u_n \leq u_{n+1}$, et *strictement croissante* si $\forall n, u_n < u_{n+1}$. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *décroissante* si $\forall n, u_n \geq u_{n+1}$, et *strictement décroissante* si $\forall n, u_n > u_{n+1}$.

Dans l'étude des suites on s'intéresse presque uniquement aux propriétés que possède les termes de la suite de rang suffisamment grand : on se moque des première valeurs que prend la suite.

### 1.2. **Opérations sur les suites.**

**Définition 1.6** (somme et produit)**.** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques.

1) La *somme* des deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de terme général $u_n + v_n$.

On définit de même la différence de deux suites. Par exemple pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut considérer la suite de terme général $u_n - \ell$ (avec $\ell$ une constante réelle fixée).

2) Le *produit* des deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de terme général $u_n v_n$. Par exemple pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut considérer la suite de terme général $\lambda u_n$ (avec $\lambda$ une constante réelle fixée).

(En particulier l'*opposé* d'une suite est bien définie, et donc aussi la *différence* de deux suites.)

**Définition 1.7** (composition avec une fonction)**.** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et soit $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ contenant toutes les valeurs de la suite (sauf peutêtre un nombre fini de termes).

On peut alors considérer la suite de terme général $g(u_n)$.

Par exemple pour toute suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on considérera souvent la suite des valeurs absolue de ses termes $|u_n|$.

**Définition 1.8** (inverse d'une suite)**.** Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *non nulle à partir d'un certain rang* s'il existe un entier $n_0$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $u_n \neq 0$.

Pour une telle suite on peut définir la suite *inverse* dont le terme de rang $n$ est $\frac{1}{u_n}$ (défini pour $n \geq n_0$).

Le *quotient* d'une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors la suite dont le terme de rang $n$ est $\frac{v_n}{u_n}$ (défini pour $n \geq n_0$).

### 1.3. **Suites majorées, minorées, bornées.**

**Définition 1.9.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée par un réel* $M$ si pour tout $n \geq 0$ on a $u_n \leq M$. On dit que la suite est majorée si elle est majorée par un certain réel $M$ (un tel réel s'appelle un *majorant de la suite*).

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est minorée par un réel* $m$ si pour tout $n \geq 0$ on a $u_n \geq m$. On dit que la suite est minorée si elle est minorée par un certain réel $m$ (un tel réel s'appelle un *minorant de la suite*).

Enfin on dit que *la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée* si elle est majorée et minorée, donc s'il existe des réels $m, M$ tels que pour tout $n \geq 0$, on a $m \leq u_n \leq M$.

Une suite positive est bornée si et seulement si elle est majorée.

Une suite est bornée si et seulement si sa valeur absolue est bornée.

Etre majorée, minorée, bornée, cela se voit sur la représentation graphique.

**Lemme 1.10** (opérations avec les suites bornées)**.**

*1) La somme de deux suites majorées, minorées, ou bornées est une suite de même nature : majorées, minorées, ou bornée (majorant : $M_1 + M_2$ ; minorant : $m_1 + m_2$).*

*2) Le produit de deux suites bornées est bornée. Le produit de deux suites* **positives** *majorées - ou minorées - est majorée (majorant : $M_1 M_2$) - ou minorée (minorant : $m_1 m_2$).*

## 2. Suites convergentes.

Une suite tend vers 0 si son terme général $u_n$ devient arbitrairement petit quand $n$ devient de plus en plus grand. Et les suites tendant vers 0 permettent de définir toutes les convergences possible des suites numériques (vers une limite finie). Formellement :

**Définition 2.1** (avec des $\varepsilon$)**.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.
**Tendre vers 0** : on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 si la propriété suivante a lieu :
pour tout nombre $\varepsilon > 0$ (aussi petit soit-il) on peut trouver un rang $N$ à partir duquel tous les termes de la suite sont $\varepsilon$-petits, autrement dit pour tout $n \geq N$, on a $|u_n| \leq \varepsilon$.
En quantificateur cela donne :

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq N, \quad |u_n| \leq \varepsilon$$

On notera $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.
**Tendre vers un réel** $\ell$ : on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell$ lorsque la différence $u_n - \ell$ tend vers 0. En quantificateur cela donne :

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

On notera $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$.
**Tendre vers** $\pm\infty$ : on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ [respectivement : $-\infty$] si la propriété suivante a lieu :
pour tout nombre $A \in \mathbb{R}^+$ (aussi grand soit-il) on peut trouver un rang $N$ à partir duquel tous les termes de la suite sont $A$-grands [respectivement : $(-A)$-petits], autrement dit pour tout $n \geq N$, on a $u_n \geq A$ [respectivement : $u_n \leq -A$].
En quantificateur cela donne :

$$\forall\ A \geq 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq N, \quad u_n \geq A$$

$$[\forall\ A \geq 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq N, \quad u_n \leq -A]$$

On notera $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ [resp ; $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$].

Notons que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\pm\infty$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang, donc $\frac{1}{u_n}$ est bien définie pour $n$ suffisamment grand, et la suite inverse tend vers 0.

Quelques exemples fondamentaux de suites tendant vers 0 : $\frac{1}{n}, a^{-n}$ $(a > 1)$. Cela découle de l'étude des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto e^{-x}$.

Notons aussi que converger, cela se voit sur la représentation graphique.

**Lemme 2.2.** *Si une suite a une limite finie alors elle est bornée.*

Il y a une réciproque dans le cas des suites monotones :

**Lemme 2.3.** *Supposons qu'une suite soit croissante (ou décroissante). Si la suite est bornée alors elle a une limite finie. Sinon elle tend vers $+\infty$ (vers $-\infty$ dans le cas d'une suite décroissante).*

Malheureusement les suites sont très rarement monotones.

**Lemme 2.4.** *Supposons qu'une suite positive ait une limite $\ell$ (finie ou pas). Alors $\ell \geq 0$.*
*De plus si $\ell \neq 0$ alors, pour $n$ assez grand, la suite est minorée par une constante $> 0$.*

Comment vérifier qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 ? Il suffit de majorer la suite par une suite plus simple (plus connue) et tendant vers 0 !

**Théorème 2.5** (théorème des gendarmes)**.**
*1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique, et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers 0.*
*Si pour tout $n$ (ou même tout $n$ assez grand) on a $|u_n| \leq \varepsilon_n$, alors $u_n$ tend vers 0.*
*2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites numériques telles que*

$$\forall n \geq 0, \quad v_n \leq, u_n \leq w_n.$$

*Si $\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} w_n = \ell$ alors $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$.*

**Lemme 2.6** (opérations algébriques et les limites)**.**
*1) Le produit d'une suite tendant vers 0 par une suite bornée (par exemple convergente) est une suite qui tend vers 0.*
*2) Le produit de deux suites tendant vers $\ell_1, \ell_2$ (finis) est une suite qui tend vers $\ell_1\ell_2$*
*3) La somme de deux suites tendant vers $\ell_1, \ell_2$ (finis) est une suite qui tend vers $\ell_1 + \ell_2$.*
*4) Le produit d'une suite tendant vers $+\infty$ par une suite minorée par un réel $m > 0$ est une suite tendant vers $+\infty$. La somme de deux suites tendant vers $+\infty$ (ou toutes deux vers $-\infty$) tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$).*

A retenir : les opérations usuelles sur les suites convergentes se passent bien...
Il reste des formes indéterminées : somme d'une suite tendant vers $+\infty$ et d'une suite tendant vers $-\infty$. Ou produit d'une suite tendant vers $+\infty$ et d'une suite tendant vers 0. Nous allons développer des outils qui permettent de conclure quand même dans certains cas.

**Lemme 2.7** (composée par une fonction continue)**.**
*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique tendant vers un réel $\ell$. Soit $g$ une fonction définie et continue sur un intervalle $I$ ouvert et centré en $\ell$ (donc $I = ]\ell - \alpha, \ell + \alpha[$).*
*Alors la suite de terme général $g(u_n)$ est définie pour $n$ assez grand, et de plus cette suite tend vers $g(\ell)$.*

## 3. Comparaison de suites.

Pour étudier le comportement d'une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et notamment sa limite éventuelle, nous allons comparer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à une suite "plus simple" $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, étudier $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et pour finir en déduire des renseignements sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

### 3.1. **Les quatre types de comparaisons.**

**Définition 3.1** (équivalents, grand $O$, petit $o$, $\Theta$)**.** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques.

1) (Suites équivalentes.) Supposons qu'aucun terme des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit nul. On dit que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont *équivalentes* lorsque la suite quotient $(\frac{u_n}{u'_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1, $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u'_n} = 1$. On note $u_n \sim u'_n$.

2) (Suites négligeables.) Supposons qu'aucun terme de la suite $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit nul, et que la suite la suite quotient $(\frac{u_n}{u'_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers 0, $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u'_n}=0$. On dit alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est un petit o de la suite* $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On note $u_n=o(u'_n)$.

Autres terminologies : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est négligeable devant la suite* $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (parfois noté $u_n << u'_n$), $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est prépondérante devant la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) (Suites asymptotiquement majorées.) Supposons qu'aucun terme de la suite $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit nul, et que la suite quotient $(\frac{u_n}{u'_n})_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée, $|\frac{u_n}{u'_n}|\leq A<+\infty$ (pour un certain $A\geq 0$). On dit alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est un grand $O$ de la suite* $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On note $u_n=O(u'_n)$.

On dit aussi que $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est un grand $\Omega$ de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On note $u'_n=\Omega(u_n)$.

4) (Suites asymptotiquement comparables.) Enfin, si on suppose qu'aucun terme des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est nul, et que la suite positive quotient $(|\frac{u_n}{u'_n}|)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée loin de 0, donc $\frac{1}{A}\leq|\frac{u_n}{u'_n}|\leq A<+\infty$ (pour un certain $A>0$). On dit alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est un grand $\Theta$ de la suite* $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On note $u_n=\Theta(u'_n)$.

Toutes les notions ci-dessus sont définies en supposant que certaines suites ne prennent jamais la valeur 0, mais on peut en fait les définir pour des suites numériques absolument quelconques, en utilisant des produits plutôt que des quotients.

**Définition 3.2** (cas général)**.** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}},(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites quelconques.

(1) Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}},(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes s'il existe une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

(a) $\lim_{n\to\infty}q_n=1$ ;

(b) pour $n$ assez grand on a $u_n=u'_nq_n$.

(2) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (noté $u_n=o(u'_n)$) s'il existe une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

(a) $\lim_{n\to\infty}q_n=0$ ;

(b) pour $n$ assez grand on a $u_n=u'_nq_n$.

(3) On dit que $u_n=O(u'_n)$ s'il existe une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

(a) $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ;

(b) pour $n$ assez grand on a $u_n=u'_nq_n$.

(4) On dit que $u_n=\Theta(u'_n)$ s'il existe une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

(a) la suite positive de terme général $|q_n|$ est bornée et minorée par une constante $m>0$ ;

(b) pour $n$ assez grand on a $u_n=u'_nq_n$.

Cependant les exemples de suites étudiées seront presque toujours non nulles à partir d'un certain rang, donc on peut se contenter de la première définition (par quotient de suites). Les preuves des différentes propriétés (par exemple dans la remarque ci-dessous) sont souvent faciles voire évidentes avec la définition par quotient, et elles s'adaptent sans difficulté au cas général (en traitant la suite $q_n$ comme une suite quotient $\frac{u_n}{u'_n}$, alors que celui-ci n'est pas toujours défini).

**Remarque 3.3.**

1) Les définitions ci-dessus s'adaptent *mutatis mutandis* au cas des suites définies seulement à partir d'un certain rang $n_0$. Dans la suite nous considérons des suites définies sur $\mathbb{N}$ pour simplifier les énoncés, en laissant au lecteur le soin d'adapter les énoncés aux suites définies à partir d'un certain rang $n_0$.

2) On a toujours $u_n \sim u_n$ (la relation $\sim$ est *réflexive*). Si $u_n \sim u'_n$ alors $u'_n \sim u_n$ (la relation $\sim$ est *symétrique*). Si $u_n \sim u'_n$ et $u'_n \sim u''_n$ alors $u'_n \sim u''_n$ (la relation $\sim$ est *transitive*). Compte-tenu de ces trois propriétés on dit que la relation $\sim$ est une relation d'*équivalence*.

Si $u_n = o(u'_n)$ et $u'_n = o(u''_n)$ alors $u_n = o(u''_n)$. En fait on a aussi : si $u_n = o(u'_n)$ et $u'_n = O(u''_n)$, ou bien $u_n = O(u'_n)$ et $u'_n = o(u''_n)$, alors $u_n = o(u''_n)$.

3) Tendre vers 0, c'est être $o(1)$.

Être bornée, c'est être $O(1)$ (par exemple $\sin(n)$).

Être dans $[\varepsilon, A]$ en valeur absolue (avec $\varepsilon > 0$ et $A$ fini), c'est être $\Theta(1)$. Par exemple $2 + \sin(n) = \Theta(1)$, mais on peut montrer que $\sin(n)$ n'est pas $\Theta(1)$ (car il existe des choix de $n$ pour lesquels $\sin(n)$ devient arbitrairement petit).

*Tendre vers $\ell \in \mathbb{R}, \ell \neq 0$, c'est être équivalent à la suite constante $\ell$.*

ATTENTION : presqu'aucune suite n'est équivalente à la suite nulle. En effet $u_n \sim 0 \iff u_n = 0$ pour $n$ assez grand.

4) Lien entre les comparaisons :

(a) $u_n \sim u'_n \Rightarrow u_n = \Theta(u'_n) \Rightarrow u_n = O(u'_n)$,

(b) $u_n = o(u'_n) \Rightarrow u_n = O(u'_n)$.

(c) Si $u_n = o(u'_n)$ et $u_n$ n'est pas nulle à partir d'un certain rang, alors $u_n$ n'est pas équivalente à $u'_n$.

**Exemple 3.4** (fondamentaux !)**.**

1) $\frac{1}{n} \sim \frac{1}{1+n}$ ; mais $\frac{1}{n} \not\sim \frac{1}{n^2}$. En fait $\frac{1}{n^2} = o(\frac{1}{n})$. Les deux suites tendent vers 0.

En effet si $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ alors $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$. Et si $n \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ alors $\frac{1}{n^2} \leq \varepsilon$.

Plus généralement $\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n^4}, \ldots, \frac{1}{n^k}\ \ k \geq 1, \ldots$ tendent toutes vers 0. Donc toute suite équivalente à l'une d'elle tend vers 0. Mais ces suites ne tendent pas vers 0 à la même vitesse :

$\frac{1}{n^k}$ est négligeable devant $\frac{1}{n^\ell}$ dès que $k > \ell$. En particulier ces suites ne sont jamais équivalentes.

Les suites $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}, \frac{1}{n^4}, \ldots, \frac{1}{n^k}\ \ k \geq 1, \ldots$ sont essentielles, elles donnent des modèles simples de convergence vers 0.

Quand une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, on essaie de voir si $u_n \sim \frac{a}{n^k}$ pour un certain réel $a$ et un certain entier $k \geq 1$.

2) Dans l'autre sens on a de même :

$n \sim n+1$, $n \sim n + 3 - \frac{2}{n^4}$, mais $n = o(n^2)$ (puisque $\frac{1}{n} \to 0$).

Ici encore on a une échelle de petit $o$ :

$n = o(n^2), n^2 = o(n^3), \ldots$ et plus généralement $n^k = o(n^\ell)$ pour $k < \ell$.

On essaie toujours de comparer une suite qui $\to +\infty$ à une suite de la forme $an^k$ (pour $a > 0$ et $k \geq 1$).

3) Suites géométriques : $(a^n)_{n \geq 0}$ ($a \in \mathbb{R}, a > 0$ fixé).

Si $a = 1$ la suite est constante égale à 1.

Si $0 < a < 1$ alors $a^n$ est décroissante et minorée par 0. Donc elle converge vers un nombre $\ell \geq 0$. Supposons $\ell > 0$ : alors $\ell < \frac{\ell}{a}$. Comme $a^n \to \ell$ pour un certain $N$ assez grand on aura $\ell \leq a^N < \frac{\ell}{a}$. Alors en multipliant par $a$ on trouve $a\ell \leq a^{N+1} < \ell$. Comme $a^n$ est décroissante sa limite est inférieure ou égale à chacun de ses termes. Donc on obtient $\ell \leq a^{N+1} < \ell$, absurde.

De même si $a > 1$ alors $a^n$ est une suite strictement croissante et par un raisonnement analogue au précédent on montre facilement qu'elle tend vers $+\infty$.

Application : si $0 < a < b$ alors $a^n = o(b^n)$. En effet $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$.

**Lemme 3.5** (équivalent d'une suite polynômiale)**.** *Soit $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d$ un polynôme, avec $d$ un entier $\geq 1$, et $a_0, \ldots, a_d$ des nombres réels, $a_d \neq 0$. Considérons la suite $u_n = P(n)$, autrement dit $u_n = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \cdots + a_d n^d$.*

*Alors $u_n \sim a_d n^d$, le terme de plus haut degré.*

Par exemple $u_n = 2 - 3n + 5n^4$ est équivalente à $5n^4$.

Pour trouver un équivalent d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quelconque on procède comme dans le cas polynômial : on essaie de deviner quelle est la partie prépondérante, on la factorise, on voit si le quotient restant tend bien vers 1.

Voici l'intérêt des équivalents :

**Théorème 3.6.**

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques.*

*Si $u_n \sim u'_n$ et si $\lim_{n\to\infty} u'_n = \ell$ (finie ou pas) alors on a aussi $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$. Si $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'en a pas non plus.*

Le principe est donc, pour étudier la limite éventuelle d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée, de lui trouver un équivalent $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ plus simple, pour laquelle on arrive à trouver la limite (ou l'absence de limite).

Des équivalents plus simples permettent aussi, le cas échéant, de faire plus simplement les comparaisons :

**Proposition 3.7.** *Supposons que $u_n \sim u'_n$ et que $v_n \sim v'_n$. Comparons alors $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ :*

(1) *Si $u'_n \sim v'_n$ alors $u_n \sim v_n$.*
(2) *Si $u'_n = O(v'_n)$ alors $u_n = O(v_n)$.*
(3) *Si $u'_n = o(v'_n)$ alors $u_n = o(v_n)$.*

Exemple : si $u_n$ est négligeable devant $v_n$ compliquée et $v_n \sim v'_n$ plus simple alors $u_n = o(v_n)$. Par exemple si $u_n = o(\frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^3})$ alors comme $\frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^3} \sim \frac{1}{n^2}$ on aura $u_n = o(\frac{1}{n^2}$.

**Remarque 3.8.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques.

1) Si $u_n = o(u'_n)$ et $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Par exemple pour $u_n = \frac{\cos(n)}{n}$ on a $u_n = o(\cos(n))$ et $\cos(n)$ bornée, donc $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

2) Si $u_n = O(u'_n)$ et $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Par exemple pour $u_n = \frac{n\cos(n)}{n+1}$ on a $u_n = O(\frac{n}{n+1})$ et $\frac{n}{n+1}$ bornée, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

## 4. Comparaisons et opérations sur les suites.

### 4.1. Équivalent d'une somme.
Le résultat suivant est *essentiel* :

**Lemme 4.1** (une suite + une suite négligeable = une suite équivalente)**.**
*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. Supposons que $v_n = o(u_n)$. Alors les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes.*

Ce lemme permet de trouver immédiatement un équivalent dans une somme - en repérant le terme prépondérant.

Par exemple : $2^{3n} + 3^{2n} \sim 3^{2n}$ car $2^3n = 8^n$, $3^{2n} = 9^n$ et $8^n = o(9^n)$.

Plus généralement $\alpha_1(a_1)^n + \cdots + \alpha_k(a_k)^n$ est équivalent à $\alpha_k(a_k)^n$ (pour $0 < a_1, \ldots, a_{k-1} < a_k$ et $\alpha_k \neq 0$).

Quand on calcule avec des sommes de suites on peut regrouper toutes les suites négligeables en une seule :

**Lemme 4.2** (sommes de $o$)**.**
*Soient $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites négligeables devant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors on a $v_n + w_n = o(u_n)$.*

*Plus généralement, la somme d'un nombre fini de suites négligeables devant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste négligeable devant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Enfin la réciproque du Lemme 4.1 est valable, et est utile pour les calculs :

**Lemme 4.3.** *Supposons que $u_n \sim u'_n$. Alors $u'_n = u_n + v_n$, avec $v_n = o(u_n)$.*

*Démonstration.* Posons $v_n = u'_n - u_n$ Alors le quotient de $v_n$ par $u_n$ tend vers $1 - 1$, donc vers 0, ce qui conclut. □

Par exemple pour trouver un équivalent de $u_n = \frac{2}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$, on remarque d'abord que $\frac{1}{(n+1)^2} \sim \frac{1}{n^2}$, d'où $\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$, alors $u_n = \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$. Donc $u_n = \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ et finalement $u_n \sim \frac{1}{n^2}$.

### 4.2. Utilisation des développements limités (=DL) pour les comparaisons.

**Proposition 4.4** (équivalents de suites composées : cas favorables)**.**
*Soit $f : ]-\alpha, \alpha[ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable $k-1$ fois, à dérivée $k-1$-ième continue (pour $k \geq 1$). Pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite tendant vers $0$ on considère la suite composée $u_n = f(x_n)$. Alors $u_n$ est définie pour $n$ assez grand et*

$$u_n = f(0) + f'(0)x_n + \frac{f''(0)}{2}(x_n)^2 + \cdots + \frac{f^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}(x_n)^{k-1} + o((x_n)^{k-1}).$$

*En particulier si $f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{k-1}(0)$ alors $u_n = o((x_n)^{k-1})$ (par convention $(x_n)^0 = 1$ même si $x_n = 0$).*

*Si $f$ est $k$ fois dérivable, à dérivée $k$-ième continue, et $f^k(0) = a \neq 0$, alors les suites $u_n$ et $a(x_n)^k$ sont équivalentes. (En particulier $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, et pour avoir un meilleur équivalent de $u_n$ il n'y a plus qu'à trouver un équivalent de $x_n$ et appliquer la règle d'équivalent des puissances - voir plus bas.)*

**On s'en sert tout le temps**, et pas seulement avec $u_n = \frac{1}{n}$.

**Exemple 4.5.** Pour trouver un équivalent de $u_n = \cos(\ln(1+\frac{1}{n})) - 1$ on remarque d'abord que $x_n = \ln(1+\frac{1}{n})$ tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini. Alors d'après le DL de $\cos(x)$ quand $x \to 0$ on a $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ (avec $\lim_0 \varepsilon(x) = 0$), donc $\cos(x_n) = 1 - \frac{x_n^2}{2} + o((x_n)^2)$. Alors $u_n \sim -\frac{x_n^2}{2}$. Et comme $x_n = \ln(1+\frac{1}{n})$ on a (par le DL de $\ln(1+u)$ quand $u \to 0$) $x_n \sim \frac{1}{n}$. Finalement $u_n \sim \frac{1}{2n^2}$.

Dans la pratique certaines fonctions usuelles reviennent tout le temps : elles sont de classes $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaines de définition, donc admettent des DLs à tous les ordres en 0, et *ces DLs en 0 sont à connaître* :

$$(1)\ \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^k x^k + x^k\varepsilon(x)$$

(vient de la formule algébrique $(1-x)(1+x+\cdots+x^n) = 1 - x^{n+1}$)

En intégrant :

$$(2)\ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{k+1}}{k+1} + x^{k+1}\varepsilon(x).$$

$$(3)\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + x^k\varepsilon(x).$$

En remplaçant $x$ par $ix$ (puis en prenant les parties imaginaires et réelles) :

$$(4)\ \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2k+\mathbf{2}}\varepsilon(x).$$

$$(5)\ \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2k+\mathbf{1}}\varepsilon(x).$$

### 4.3. **Équivalents des produits et des quotients.**

**Proposition 4.6** (comparaison de produits et de quotients)**.** *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques.*

*1) Si $u_n \sim u'_n$ et $v_n \sim v'_n$ alors $u_nv_n \sim u'_nv'_n$ (et $\frac{u_n}{v_n} \sim \frac{u'_n}{v'_n}$ si $v_n$ non nulle pour $n$ assez grand).*

*2) Si $u_n = O(u'_n)$ et $v_n = O(v'_n)$ alors $u_nv_n = O(u'_nv'_n)$.*

*3) Si $u_n = O(u'_n)$ et $v_n = o(v'_n)$ alors $u_nv_n = o(u'_nv'_n)$.*

*4) Si $u_n = o(u'_n)$ et $v_n = o(v'_n)$ alors $u_nv_n = o(u'_nv'_n)$.*

*5) Si $u_n = \Theta(u'_n)$ et $v_n = \Theta(v'_n)$ alors $u_nv_n = \Theta(u'_nv'_n)$ (et $\frac{u_n}{v_n} = \Theta(\frac{u'_n}{v'_n})$).*

En résumé : les comparaisons se comportent bien lorsqu'on effectue un produit (voire un quotient) de suites - et c'est bien normal puisque les comparaisons sont définies à l'aide de produits de suites.

**Corollaire 4.7** (équivalent des puissances)**.**

*Si $x_n \sim \frac{a}{n}$ $(a \neq 0)$ alors $(x_n)^k \sim a^k \frac{1}{n^k}$. Plus généralement si $x_n \sim y_n$ alors $(x_n)^k \sim (y_n)^k$.*

**Exemple 4.8.**

1) La suite $(n+3)e^{n+\frac{1}{n}}$ est le produit de $u_n = n+3$ et $v_n = e^{n+\frac{1}{n}}$. Or $u_n \sim n$ et $v_n \sim e^n$, donc $(n+3)e^{n+\frac{1}{n}} \sim ne^n$.

2) $\frac{\sin(\frac{1}{2n})}{\ln(1+\frac{1}{3n})}$ est le quotient de $u_n = \sin(\frac{1}{n})$ par $v_n = \ln(1+\frac{1}{n})$. Or $\sin(x) = x + x\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$, donc $u_n \sim \frac{1}{2n}$. De même $\ln(1+x) = x + x\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$, donc $v_n \sim \frac{1}{3n}$. Ainsi par quotients d'équivalents on a $\frac{\sin(\frac{1}{2n})}{\ln(1+\frac{1}{3n})} \sim \frac{3}{2}$, ce qui signifie que $\frac{\sin(\frac{1}{2n})}{\ln(1+\frac{1}{3n})} \to \frac{3}{2}$.

4.4. **Problèmes avec les sommes et les composées.**

Les comparaisons se passent TRÈS mal avec les sommes ou les différences.

**Exemple 4.9** (problèmes avec les sommes d'équivalents)**.** On a $u_n = \frac{1}{n} \sim u'_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ et $v_n = \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n} \sim v'_n = \frac{1}{n^4} - \frac{1}{n}$, mais pourtant $u_n + v_n = \frac{1}{n^3}$ n'est PAS équivalent à $u'_n + v'_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}$...

Il y a aussi un problème avec les suites composées :

**Exemple 4.10** (problèmes avec les composées d'équivalents)**.** Si $u_n \sim u'_n$ et $v_n = g(u_n), v'_n = g(v_n)$ alors parfois $v_n$ et $v'_n$ sont équivalentes, mais parfois aussi $v_n$ et $v'_n$ ne sont pas équivalentes !

$n \sim n+1$ et pourtant $e^n$ n'est pas équivalent à $e^{n+1}$ ! C'est pourquoi il faut justifier l'équivalence suivante $e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim e^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}} - 1$ : dire seulement “car $\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$” est un mauvais argument, puisqu'il est faux en général.

Pour conclure on étudie chacune des deux suites, et on montre qu'elles sont bien équivalentes à une même troisième suite. Pour cela on utilise le DL de $e^x$ quand $x \to 0$, ce qui donne : $e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$ et $e^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}} = 1 + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}) + o((\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}))$. D'où $e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}$ et $e^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}} - 1 \sim (\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}) \sim \frac{1}{n}$, et les deux suites sont bien équivalentes.

Autre exemple $\ln(n+2) \sim \ln(n)$. Dire : “ $n+2 \sim n$, donc en appliquant ln on trouve l'équivalence ” serait abusif. Il faut une étude spécifique puisque le théorème général est faux !

Dans $n+2$ on met en facteur la partie prépondérante, $n$, soit : $n+2 = n(1+\frac{2}{n})$. Alors $\ln(n+2) = \ln(n) + \ln(1+\frac{2}{n})$. La suite $\ln(n)$ tend vers l'infini, la suite $\ln(1+\frac{2}{n})$ tend vers 0, donc est négligeable devant $\ln(n)$. Ainsi $\ln(n+2) \sim \ln(n)$.

**Principe de précaution :**

Tant qu'on travaille avec des sommes, des différences ou des compositions, on fait des calculs **EXACTS** (on garde le signe =). Quand apparaît une factorisation (ou un quotient) alors on est autorisé à passer aux équivalents.

Il faut toujours calculer avec les DLs le plus longtemps possible pour pouvoir correctement conclure aux équivalences.

## 5. Une étude de croissance comparée : exponentielle, polynôme, logarithme.

**Définition 5.1** (notation exponentielle)**.**

Soit $a, b$ deux réels, avec $a > 0$. On note $a^b$ le réel $e^{b\ln(a)}$.

Il faut remarquer que cette notation est cohérente avec la notation $\exp(x) = e^x$, car $\ln(e) = 1$. Et qu'elle est cohérente avec la notation des puissances entière car $e^{nt} = (e^t)^n$. Enfin elle est aussi cohérente avec la notation des puissances fractionnaires - $a^{\frac{p}{q}}$ - car $e^{\frac{p}{q}t} = (e^t)^{\frac{p}{q}}$. En fait avec cette notation on a :

Règles de calcul :

$$(a^b)^c = (e^{b\ln(a)})^c = e^{c\ln(e^{b\ln(a)}} = e^{cb\ln(a)} = a^{bc}$$

Et

$$a^{b_1}a^{b_2} = e^{b_1\ln(a)}e^{b_2\ln(a)} = e^{b_1\ln(a)+b_2\ln(a)} = e^{(b_1+b_2)\ln(a)} = a^{b_1+b_2}$$

En particulier $a^{-b} = \frac{1}{a^b} = (\frac{1}{a})^b$.

**Remarque 5.2** (limites d'exponentielles)**.** Pour $a > 0$ considérons la fonction $x \mapsto a^x$, définie sur $]0, +\infty[$, tout comme ln.

Si $a > 1$ alors $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ et $\lim_{x\to 0} a^x = 0$.

Si $0 < a < 1$ alors $a^x = \frac{1}{(\frac{1}{a})^x}$ et donc $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$ et $\lim_{x\to 0} a^x = +\infty$.

**Lemme 5.3.** *La fonction $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$.*

*Démonstration.* La fonction $f$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et $f'(x) = \frac{\ln(x)-\frac{x}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{\ln(x)-1}{(\ln(x))^2}$. Donc $f'(x) > 0$ si $x > e$.

Ainsi $f$ est croissante sur $]e, +\infty[$. En particulier si $x \geq e$ alors $f(x) \geq f(e) = e$.

Notons alors que $f(x^2) = \frac{x^2}{\ln(x^2)} = \frac{x}{2}\frac{x}{\ln(x)} = \frac{x}{2}f(x)$. Donc si $x \geq e$ alors $f(x^2) \geq \frac{ex}{2} \geq x$. Autrement dit : si $y \geq e^2$ alors $f(y) \geq \sqrt{y}$. Ceci conclut.

□

**Corollaire 5.4.** *La fonction $g(x) = \frac{e^x}{x}$ tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$.*

*Démonstration.* En effet :

$$g(x) = \frac{e^x}{e^{\ln(x)}} = e^{x-\frac{1}{f(x)}}$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ on en déduit que $\lim_{x\to+\infty}(x - \frac{1}{f(x)}) = +\infty$, ce qui conclut.

□

**Théorème 5.5** (vers $+\infty$ : logarithme $<<$ polynôme $<<$ exponentielle)**.**

*Soient $a, b, c$ trois réels $> 0$, avec $a > 1$. Alors :*

$$(\ln(n))^c << n^b << a^n$$

*Démonstration.* Par définition $a^x = e^{x\ln(a)}$, et on sait que $e^{x\ln(a)} = (e^{x\frac{\ln(a)}{b}})^b$. Donc

$$\frac{a^x}{x^b} = (\frac{e^{x\frac{\ln(a)}{b}}}{x})^b = c^b[\frac{e^y}{y}]^b$$

avec $c = \frac{\ln(a)}{b}$ et $y = cx$.

Quand $x \to +\infty$ on a $y \to +\infty$ car $c = \frac{\ln(a)}{b} > 0$ puisque $a > 1$. Donc d'après le Corollaire 5.4 on a $\frac{e^y}{y} \to +\infty$. Alors comme $c^b > 0$ et $b > 0$ on en déduit que $c^b[\frac{e^y}{y}]^b \to +\infty$, ce qu'il fallait démontrer.

Il n'y a plus qu'à établir la première comparaison.

Or

$$\frac{(\ln(n))^c}{n^b} = \frac{e^{c\ln(\ln(n))}}{e^{b\ln(n)}} = e^{c\ln(\ln(n))-b\ln(n)} = e^{-bc\ln(n)[1-\frac{1}{b}\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}]}$$

Quand $n \to \infty$ on a $\ln(n) \to +\infty$, donc $\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} \to 0$ d'après le Lemme 5.3, et l'argument de l'exponentielle tend vers $-\infty$ (car $b, c > 0$). Ainsi $\frac{(\ln(n))^c}{n^b} \to 0$.

□

**Exemple 5.6.**

Comparer la croissance des suites $n^2, n^n, e^{\sqrt{n}}, e^{n^2}$.

Réponse : on a $n^2 << e^{\sqrt{n}} << n^n <<, e^{n^2}$.

**Théorème 5.7** (vers 0 logarithme >> polynôme >> exponentielle !)**.** *Soient $a, b, c$ trois réels $> 0$, avec $a > 1$. Alors :*

$$\frac{1}{(\ln(n))^c} >> \frac{1}{n^b} >> \frac{1}{a^n}$$

*Démonstration.* On passe à l'inverse dans les comparaisons du théorème précédent. □

**Définition 5.8** (ordre de convergence)**.**

L'*ordre de convergence* d'une suite $u_n$ vers sa limite $\ell$ (finie) est :

(1) *polynômial* si $u_n - \ell \sim \frac{K}{n^b}$ (pour un certain $b > 0$, souvent entier, mais pas nécessairement, et $K \neq 0$ un réel)

(2) *exponentiel* si $u_n - \ell \sim \frac{K}{a^n}$ (pour un certain $a > 1$, et $K \neq 0$ un réel)

(3) *logarithmique* si $u_n - \ell \sim \frac{K}{(\ln(n))^c}$ (pour un certain $c > 0$, et $K \neq 0$ un réel)

Une suite qui converge polynômialement converge beaucoup plus lentement qu'exponentiellement, mais beaucoup plus rapidement que logarithmiquement.

## 6. Quelques principes de calculs.

6.1. **Produit ou quotient.** Si $u_n = v_n w_n$ ou $u_n = \frac{v_n}{w_n}$ on cherche un équivalent plus simple pour $v_n$ ou $w_n$, le produit (ou le quotient donne un équivalent plus simple pour $u_n$..

6.2. **Composée.** Supposons $u_n = g(x_n)$ avec $x_n \to 0$, et $g$ admet un DL en 0 de la forme $g(x) = \ell + Kx^p + x^p\varepsilon(x)$ ($K \neq 0$ et $\varepsilon \to 0$ en 0), alors on aura $u_n - \ell \sim \frac{K}{n^p}$, donc une convergence polynômiale vers la limite $\ell$.

(Attention : la condition $K \neq 0$ est bien évidemment essentielle !)

6.3. **Somme (ou différence).** Si $u_n = v_n + w_n$ on cherche si par hasard on n'aurait pas $w_n = o(v_n)$, auquel cas on sait que $u_n \sim v_n$.

On peut faire apparaître artificiellement un produit (et un quotient), en mettant en facteur $v_n$ :

$$u_n = v_n(1 + \frac{w_n}{v_n})$$

(cela peut même devenir un procédé systématique quand on ne sait pas quoi faire...)

Par exemple il se peut que $w_n \sim K v_n$, avec $K \neq -1$ : alors $u_n \sim (1 + K)v_n$.

6.4. **Formes indéterminées du type : (infini) - (infini).** On doit étudier une différence $u_n = v_n - w_n$, avec $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tendent vers $+\infty$.

D'abord il n'y a rien à dire si $v_n = o(w_n)$ ou $w_n = o(v_n)$ : on a tout de suite $u_n \sim w_n$ (ou $u_n \sim v_n$).

Supposons au contraire que $v_n \sim w_n$. On a alors une forme indéterminée parce que dans la factorisation $u_n = v_n(1 - \frac{w_n}{v_n})$, le terme $v_n$ tend vers l'infini mais le terme $1 - \frac{w_n}{v_n}$ tend vers 0. Il faut alors essayer de trouver les ordres de convergence vers 0 ou vers $+\infty$ (par exemple par des DLs).

Notons que si $u_n = v_n - w_n$, avec $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tendent vers 0, et $v_n \sim w_n$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, mais l'ordre de sa convergence est indéterminée : tout ce qu'on peut dire c'est que $u_n = o(v_n)$.