Cours d'intégration.

Commençons par quelques rappels sur l''intégrale d'une fonction numérique réelle - qui nous serviront même en dimension plus grande.

1. Rappels en dimension 1.

1.1. **L'intégrale comme limite de sommes de Riemann.**

L'intégrale d'une fonction numérique réelle est définie *pour toute fonction continue* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, notée $\int_a^b f(x)dx$.

Intuitivement il s'agit de l'aire sous la courbe, ou encore d'une pesée de la fonction. Mais voici comment on procède rigoureusement :

pour $n \geq 1$ un entier fixé on subdivise l'intervalle $[a,b]$ en n sous-intervalles consécutifs

$$[a,b] = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \cdots \cup [a_n, b_n]$$

avec $a_i = a + (i-1)\frac{b-a}{n}$ et $b_i = a + i\frac{b-a}{n}$. Ensuite on considère la somme (dite de Riemann) :

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{i=n} f(a_i)\frac{b-a}{n}$$

Cette somme représente précisément l'aire d'une réunion de rectangles de base $b_i - a_i (= \frac{b-a}{n})$, de hauteur $f(a_i)$.

La fonction f est continue sur chaque intervalle $[a_i, b_i]$, donc elle y admet un maximum $M_{n,i}(f)(= f(\alpha_{n,i}))$ pour un certain $\alpha_{n,i} \in [a_i, b_i])$, et un minimum $m_{n,i}(f)(= f(\beta_{n,i}))$ pour un certain $\beta_{n,i} \in [a_i, b_i])$. On peut alors considérer deux autres sommes de Riemann :

$$\overline{S}_n(f) = \sum_{i=1}^{i=n} f(\alpha_{n,i})\frac{b-a}{n} \text{ et } \underline{S}_n(f) = \sum_{i=1}^{i=n} f(\beta_{n,i})\frac{b-a}{n}$$

On a clairement l'encadrement :

$$\underline{S}_n(f) \leq S_n(f) \leq \overline{S}_n(f)$$

La somme $\underline{S}_n(f)$ représente l'aire d'une union de rectangles au dessous de la courbe représentative de f (et la somme $\overline{S}_n(f)$ représente l'aire d'une union de rectangles au dessus de la courbe représentative de f).

Théorème 1.1. *Les trois sommes de Riemann $\underline{S}_n(f), S_n(f), \overline{S}_n(f)$ convergent quand n tend vers l'infini. Elles ont même limite, par définition cette limite est* l'intégrale de f sur $[a,b]$*, notée* $\int_a^b f(x)dx$.

esquisse de démonstration. Par l'encadrement il suffit de montrer que $\underline{S}_n(f)$ et $\overline{S}_n(f)$ ont même limite.

On remarque que $\overline{S}_n(f) - \underline{S}_n(f) = \sum_{i=1}^{i=n}(M_{n,i}(f) - m_{n,i}(f))\frac{b-a}{n}$.

Comme f est continue sur $[a,b]$ elle y est *uniformément continue.* Donc pour ε fixé quelconque il existe $\alpha > 0$ tel que si $|x-y| < \alpha$ alors $|f(x) - f(y)| < \alpha$.

Poussons n assez loin pour que le pas de subdivision $\frac{b-a}{n}$ devienne $< \alpha$. Nous aurons alors pour tout i la majoration suivante de l'écart maximal des valeurs de f sur $[a_i, b_i]$:

$$M_{n,i}(f) - m_{n,i}(f) < \varepsilon$$

Ainsi

$$\overline{S}_n(f) - \underline{S}_n(f) < \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon \frac{b-a}{n} = \varepsilon(b-a)$$

Nous venons en fait de montrer que $\lim_{n\to+\infty} \overline{S}_n(f) - \underline{S}_n(f) = 0$. Il reste à montrer que les deux suites convergent (ou une seule, puisque leur distance tend vers 0).

On constate alors que si $m \geq 1$ divise $n \geq 1$ alors on a

$$\underline{S}_n(f) \leq \underline{S}_m(f) \leq \overline{S}_m(f) \leq \overline{S}_n(f)$$

Donc par exemple la suite $\underline{S}_{2^n}(f)$ est croissante, la suite $\overline{S}_{2^n}(f)$ est décroissante et on a montré ci-dessus que $\overline{S}_{2^n}(f) - \underline{S}_{2^n}(f) \to 0$: par le théorème des suites adjacentes il en résulte que ces deux suites ont même limite.

(Cette façon d'intégrer par subdivisions successives en deux intervalles égaux - “dichotomie” - se programme bien.)

Pour conclure la preuve on montre que la suite $\underline{S}_n(f)$ est de Cauchy. Pour $n, k \geq N$ (on prendra N très grand ensuite), posons $m = kn$. Alors $\underline{S}_n(f) \leq \underline{S}_m(f) \leq \overline{S}_n(f)$, donc

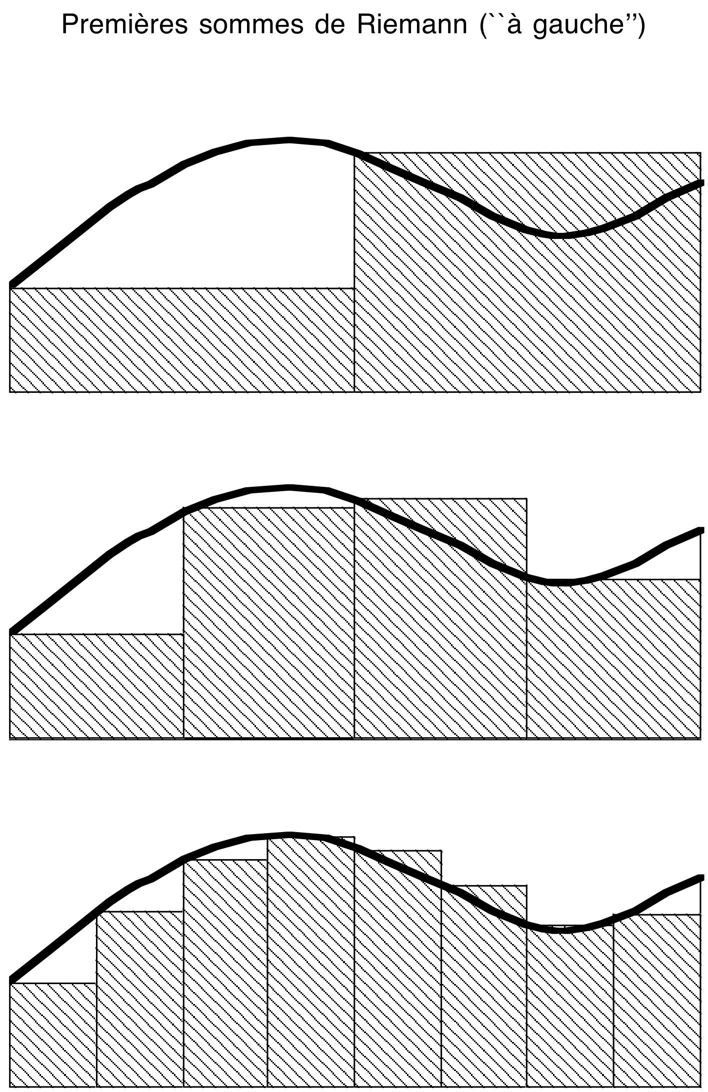
$$|\underline{S}_n(f) - \underline{S}_m(f)| \leq |\underline{S}_n(f) - \overline{S}_n(f)|$$

et de même

$$|\underline{S}_k(f) - \underline{S}_m(f)| \leq |\underline{S}_k(f) - \overline{S}_k(f)|$$

Or nous avons montré que la suite $(|\underline{S}_p(f) - \overline{S}_p(f)|)$ tend vers 0, donc si N est assez grand $|\underline{S}_n(f) - \underline{S}_m(f)|$ et $|\underline{S}_k(f) - \underline{S}_m(f)|$ sont très petits, de sorte que finalement $|\underline{S}_n(f) - \underline{S}_m(f)|$ est très petit.

Le théorème de Cauchy sur les suites assure alors que $(\underline{S}_n(f))_{n\geq 1}$ est convergente.



□

Une conséquence immédiate de la définition est l'encadrement suivant, où l'on a posé $m(f,[a,b]) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M(f,[a,b]) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$:

$$m(f,[a,b])(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(f,[a,b])(b-a)$$

On obtient une approximation (en générale grossière) de $\int_a^b f(x)dx$ par la quantité $f(c)\times(b-a)$, pour $c \in [a,b]$ quelconque. L'erreur commise est :

$$|\int_a^b f(x)dx - f(c)(b-a)| \leq \max\big(M(f,[a,b]) - f(c), f(c) - m(f,[a,b])\big) \times (b-a)$$

donc

$$|\int_a^b f(x)dx - f(c)(b-a)| \leq \big(M(f,[a,b]) - m(f,[a,b])\big) \times (b-a)$$

Enfin lorsque c varie dans $[a,b]$, la quantité $\int_a^b f(x)dx - f(c)(b-a)$ est ≥ 0 en tout point c tel que $f(c) = m(f,[a,b])$, et elle est ≤ 0 en tout point c tel que $f(c) = M(f,[a,b])$. Donc par la continuité de f et le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un point $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \qquad \text{(formule de la moyenne)}$$

Remarque 1.2.

1) Si au lieu de prendre le point a_i pour évaluer f dans la somme de Riemann on prend un point quelconque c_i de l'intervalle $[a_i, b_i]$, la somme de Riemann correspondante reste comprise entre $\underline{S}_n(f)$ et $\overline{S}_n(f)$. Donc cette suite de sommes converge également.

2) Si on prend une subdivision de $[a,b] = [a_1,b_1] \cup [a_2,b_2] \cup \cdots \cup [a_n,b_n]$ en intervalles non nécessairement de même longueur (mais toujours d'intérieurs disjoints), et si on choisit dedans un point $c_i \in [a_i,b_i]$ pour évaluer f, on peut considérer la somme de Riemann associée :

$$S(f,(a_i),(b_i),(c_i)) = \sum_{i=1}^{i=n} f(c_i) \times (b_i - a_i)$$

On montre facilement que quand on prend une suite de subdivisions dont le pas (par définition $= \max_i(b_i - a_i)$) tend vers 0 alors la suite de sommes de Riemann converge encore vers $\int_a^b f(x)dx$.

3) Enfin si on considère une union d'intervalles $[a_1,b_1] \cup [a_2,b_2] \cup \cdots \cup [a_n,b_n] \subset [a,b]$ dont les intérieurs sont deux à deux disjoints, et si on choisit dedans un point $c_i \in [a_i,b_i]$ pour évaluer f, alors la somme de Riemann associée :

$$S(f,(a_i),(b_i),(c_i)) = \sum_{i=1}^{i=n} f(c_i) \times (b_i - a_i)$$

converge encore vers $\int_a^b f(x)dx$ si $= \max_i(b_i - a_i)$ tend vers 0 et de plus la longueur totale du multi-intervalle ($= (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \cdots + (b_n - a_n)$) tend vers $b - a$.

Cela découle du point 2) en complétant $[a_1,b_1] \cup [a_2,b_2] \cup \cdots \cup [a_n,b_n] \subset [a,b]$ en une vraie subdivision de $[a,b]$: on rajoute les quelques intervalles manquant (il y en a au plus $n+1$, et la longueur totale des intervalles manquant tend vers 0), en choisissant dedans arbitrairement un point pour évaluer f

Pour les calculs explicites :

(1) d'une part on ne se sert (presque) pas de la définition (par limite de sommes de Riemann) mais plutôt des propriétés vues en cours ;
(2) d'autre part on travaille avec les fonctions usuelles (restreintes à un intervalle $[a,b]$).

On procèdera de même pour intégrer les fonctions continues sur un domaine du plan ou de l'espace.

1.2. **Rappels d'analyse en dimension 1.**

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est *continue (sur I)* si pour tout t dans l'intervalle I et toute suite $(t_n)_{n\geq 0}$ de réels de I tendant vers t on a $\lim f(t_n) = f(t)$. Parmi les fonctions continues une classe essentielle est constituée des fonctions usuelles.

Définition 1.3 (fonctions usuelles sur un intervalle de $\mathbb{R}$)**.** Une fonction numérique usuelle de base d'une variable réelle, c'est $f : I \to \mathbb{R}$, avec $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de longueur > 0 (ou même une union finie d'intervalles), et $f(x)$ polynomiale, exponentielle, sinusoïdale. Ensuite les fonctions usuelles s'obtiennent à partir des fonctions de base par les opérations habituelles : somme, produit, quotient (là où le dénominateur ne prend pas la valeur 0), composée, inverse (quand et où bijectif).

Exemple 1.4. Fractions rationnelles, logarithme, puissances, polynôme trigonométrique.

La dérivée d'une fonction usuelle est une fonction usuelle. Mais l'intégration - l'opération inverse de la dérivation - pose plus de problèmes : il est souvent difficile de calculer $\int_a^b f(x)dx$, même pour f usuelle assez simple.

Rappelons le :

Théorème 1.5 (théorème fondamental de l'analyse)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a,b]$, de dérivée $F'(x) = f(x)$. Si $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une quelconque autre fonction dérivable telle que $G'(x) = f(x)$, alors $F - G$ est constante. Et*

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$$

Certaines fonctions usuelles (comme les polynômes) sont des dérivées de fonctions usuelles, d'autres non !

Problème 1.6. Calculer $\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{+A} \exp(-x^2)dx$...

Proposition 1.7 (règles de calcul ou d'estimation pour $\int_a^b f(x)dx$)**.**

(1) *(multiplicativité) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et $k \in \mathbb{R}$ est une constante alors $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.*
(2) *(additivité par rapport à la fonction) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues, alors $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.*
(3) *(Chasles - ou additivité par rapport à l'intervalle) Si $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ est continue et $a \leq b \leq c$, alors $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.*
(4) *(changement de variable) Si $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et f est définie continue sur l'intervalle $\phi([a,b])$, alors $\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(y)dy$.*
(5) *(positivité) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et $f \geq 0$ sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.*

2. Fonctions usuelles de plusieurs variables, domaines usuels.

2.1. **Domaines de base du plan.**

Un point du plan géométrique est déterminé par deux coordonnées cartésiennes : pour cette raison nous appellerons l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples (x, y) un (voire "le") *plan*, et ses éléments seront appelés des points. De même nous appellerons l'ensemble $\mathbb{R}^3$ de tous les triplets (x, y, z) l'*espace*, et ses éléments seront appelés des points.

Qu'est-ce qu'un domaine de base de $\mathbb{R}^2$?

Exemples typiques :
Demi-plans : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \le 2\}, D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y > -1\}, D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 3x + 2y \le \pi\}$
Disques : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \le 1\}, D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x-2)^2 + (y+1)^2 \le 4\}$
La partie du plan au-dessus d'une parabole : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 \ge y + 1\}$

Définition 2.1. Un domaine de base du plan est une partie de la forme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, c(x,y) \ge 0\}$ [ou $c(x,y) > 0$, ou $c(x,y) \le 0$, ou $c(x,y) < 0$], avec c une fonction usuelle.

Mais alors qu'est-ce qu'une fonction usuelle ?

2.2. **Fonctions usuelles de deux ou trois variables.**

Un exemples typique, les polynômes :
(en deux variables) $(x,y) \mapsto 1$; $(x,y) \mapsto x$; $(x,y) \mapsto y$; $(x,y) \mapsto 2x + 3y - 1$; $(x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$
$(x,y) \mapsto 2x^3y^2 - 4xy^3 + xy - y - 3$; $(x,y) \mapsto 2x^2 - 3xy + y - 5$; $(x,y) \mapsto x^3y^3 - x - y$.
(en trois variables) $(x,y,z) \mapsto 1; (x,y,z) \mapsto x + 2y - 3z$; $(x,y) \mapsto -x^2 + 2yz + xz^3 + 4$
$(x,y,z) \mapsto x^9y^8z^7 + x^7y^9z^8 + x^8y^7z^9 - 3$.

Définition 2.2 (polynômes en 2 ou 3 variables)**.**

Un *polynôme sur* $\mathbb{R}^2$ est une fonction $P : (x,y) \mapsto \sum_{i,j \ge 0, i+j \le d} a_{ij} x^i y^j$ (somme finie de *monômes*). De même un *polynôme sur* $\mathbb{R}^3$ est une fonction $P : (x,y,z) \mapsto \sum_{i,j,k \ge 0, i+j+k \le d} a_{ijk} x^i y^j z^k$. Tous les exposants sont entiers.

Bref les polynômes s'obtiennent en faisant des sommes et des produits de fonctions très simples : les constantes d'une part, les coordonnées x, y (ou x, y, z) d'autre part.

Remarque 2.3.

Certains polynômes sur $\mathbb{R}^2$ (ou sur $\mathbb{R}^3$) ne dépendent en fait que d'une seule variable. Par exemple $P(x,y) = 2x - x^3$ - qu'il ne faut pas confondre avec $p(x) = 2x - x^3$ (fonction d'une seule variable) - ni avec $Q(x,y) = 2y - y^3$ (qui vaut $P(y,x)$).

D'autre part quand on fixe une variable dans un polynôme P de n variables, on obtient un polynôme des $n-1$ autres variables. Par exemple pour $P(x,y,z) = xy^2z^3 - x^2y + 4$ fixons $z = -1$, nous obtenons la fonction $(x,y) \mapsto 4 - x^2y - xy^2$, polynôme en deux variables.

Par exemple si $P = P(x,y)$ est un polynôme de deux variables, quand on fixe $y = y_0$, on obtient un polynôme d'une seule variable $x \mapsto P(x, y_0)$. Ce polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$, on notera $\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0)$ sa dérivée en $x = x_0$. Cette fonction de (x_0, y_0) s'appelle *la dérivée partielle de* P *par rapport à* x *au point* (x_0, y_0), c'est encore un polynôme.

Par exemple pour $P(x,y) = 3x^3y - 2xy^2 + y^4 - 1$ et y_0 quelconque fixé, on obtient $P(x, y_0) = 3x^3y_0 - 2xy_0^2 + y_0^4 - 1$, fonction dérivable de x dont la dérivée par rapport à x est : $9x^2y_0 - 2y_0^2$, de sorte que $\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 9x^2y - 2y^2$.

On définit de même la dérivée partielle par rapport à y : on fixe $x = x_0$ et on obtient ainsi un polynôme en y, que l'on dérive par rapport à y. Le résultat est noté $\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)$, appelé *la dérivée partielle de* P *par rapport à* y *au point* (x_0, y_0).

Définition 2.4 (fonctions usuelles)**.** Une fonction numérique usuelle de base de deux variables réelles, c'est $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui associe au point (x,y) la quantité $\phi(P(x,y))$ avec P polynomiale sur $\mathbb{R}^2$ et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polynomiale, exponentielle ou trigonométrique.

De même une fonction numérique usuelle de base de trois variables réelles, c'est $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ qui associe au point (x,y,z) la quantité $\phi(P(x,y,z))$ avec P polynomiale sur $\mathbb{R}^3$ et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polynomiale, exponentielle ou trigonométrique.

En prenant $\phi(t) = t$ on voit que les fonctions polynomiales de deux ou trois variables sont des exemples de fonctions usuelles de base.

Ensuite les fonctions usuelles s'obtiennent à partir des fonctions de base par les opérations habituelles : somme, produit, quotient (là où le dénominateur ne prend pas la valeur 0).

Ce sont ces fonctions-l qui permettent de définir les domaines usuels.

Remarque 2.5. Les fonctions considres sont des fonctions *numriques*, autrement dit, même si elles dpendent de deux (ou trois) variables, elles associent un point (x, y) du plan (ou (x, y, z) de l'espace) un *nombre rel.* Il est donc vritablement possible d'*ajouter*, de *multiplier* ou de *comparer* deux telles fonctions f et g.

Par exemple (dans le cas de deux variables pour fixer les ides):

(1) la fonction somme $f + g$ associe au point (x, y) le rel $f(x, y) + g(x, y)$,
(2) la fonction produit fg associe au point (x, y) le rel $f(x, y)g(x, y)$,
(3) on a $f \geq g$ lorsque pour tout point (x, y) o $f(x, y)$ et $g(x, y)$ sont dfinis, on a $f(x, y)geg(x, y)$.

2.3. **Domaines généraux.**

Définition 2.6 (domaines du plan ou de l'espace)**.**

Un *domaine du plan* est une partie D du plan $\mathbb{R}^2$ définie par une seule inégalité (large ou stricte) : $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, c(x, y) \geq 0\}$ (ou $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, c(x, y) > 0\}$).

Un *domaine élémentaire du plan* est une partie D du plan $\mathbb{R}^2$ définie par un nombre **fini** d'inégalités larges ou strictes : $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, c_1(x, y) \geq 0, c_2(x, y) \geq 0, \ldots, c_i(x, y) \geq 0, c_{i+1}(x, y) > 0, \ldots, c_k(x, y) > 0\}$.

Un *domaine du plan* est une union **finie** de domaines élémentaires.

De même un *domaine de l'espace* est une union finie de *domaines élémentaires de l'espace*, autrement dit de parties $D \subset \mathbb{R}^3$ définies par une famille finie d'inégalités larges ou strictes : $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, s_1(x, y, z) \geq 0, s_2(x, y, z) \geq 0, \ldots, s_j(x, y, z) \geq 0, s_{j+1}(x, y, z) > 0, \ldots, s_\ell(x, y, z) > 0\}$ (les domaines *de base* de l'espace correspondent à une seule inégalité).

Pour nous les fonctions $(x, y) \mapsto c(x, y)$ (ou $(x, y, z) \mapsto s(x, y, z)$) seront des fonctions usuelles de base (voir la Définition 2.4), presque toujours des polynômes.

Tous les domaines de base de $\mathbb{R}^2$ considérés seront *réguliers*, au sens où on interdit qu'il y ait un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $c_i(x_0, y_0) = 0$ et simultanément $\frac{\partial c_i}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial c_i}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Par le cours de calcul différentiel, cette condition assure que l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $c_i(x, y) = 0$ est bien une courbe (pour abréger cette courbe est notée par son équation $c(x, y) = 0$).

On dira alors que le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, c_1(x, y) \geq 0, c_2(x, y) \geq 0, \ldots, c_i(x, y) \geq 0, c_{i+1}(x, y) > 0, \ldots, c_k(x, y) > 0\}$ est délimité par les courbes $c_1(x, y) = 0, c_2(x, y) = 0, \ldots, c_k(x, y) = 0$.

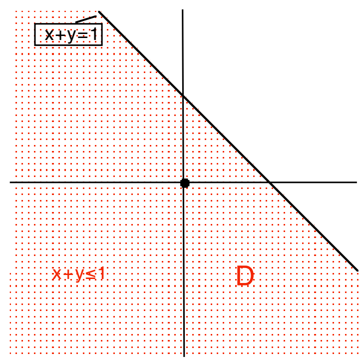
De même on supposera tous les domaines de base de $\mathbb{R}^3$ réguliers: si $\frac{\partial s_j}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial s_j}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial s_j}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$ alors $s_j(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Dans ce cas $s_j = 0$ est une bien une surface de $\mathbb{R}^3$, et les surfaces $s_1 = 0, \ldots, s_\ell = 0$ délimitent le domaine.

Un domaine est *fermé* s'il est une union finie de domaine de élémentaires définis par des inégalités larges uniquement.

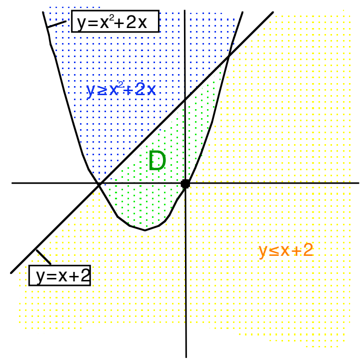
Un domaine est *borné* s'il est contenu dans un disque ou une boule.

Noter que $c(x, y) = x^2 + y^2$ est bien un polynôme mais $c(x, y) = 0$ n'est pas une courbe. D'ailleurs $\frac{\partial c}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial c}{\partial y}(0, 0) = 0$.

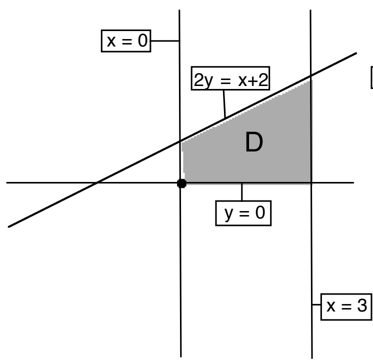
Exemples de domaines du plan



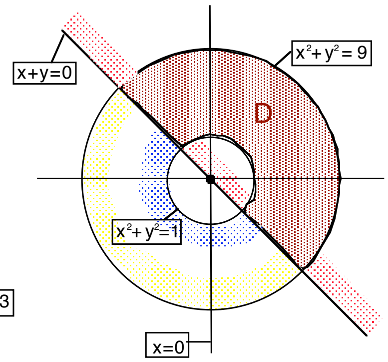
D = $\{(x,y)$ dans le plan tels que $x+y \leq 1\}$



D=$\{(x,y)$ dans $\mathbb{R}^2$ tels que $x^2+2x \leq y \leq x+2\}$



D = $\{(x,y)$ dans le plan tels que $0 \leq y,\ 0 \leq x \leq 3,\ x+2 \geq 2y\}$



D = $\{(x,y)$ dans le plan tels que $x+y \geq 0$, $1 \leq x^2+y^2$ et $x^2+y^2 \leq 9\}$

Exemple 2.7 (quelques domaines classiques en gomtrie)**.**

(1) Carrés, cubes. Paralllogrammes, paralllpipdes. Triangles, ttradres.
(2) Disque, boules. Ellipses, ellipsoïdes.

Remarque 2.8. Par définition, tout domaine peut s'obtenir à partir d'unions finie d'intersections finies de domaines de la forme $c(x,y) \geq 0$ ou $c(x,y) > 0$. Le sens des inégalités importe peu: il suffit de changer c en $-c$.

La classe des domaines considérés est stable par certaines opérations sur les ensembles:

(1) une *union* finie de domaine est un domaine

(2) une *intersection* finie de domaine est un domaine
(3) le *complémentaire* d'un domaine est un domaine

Mise en garde 2.9. Les fonctions usuelles seront restreintes à des domaines quelconques contenus dans le domaine de définition, ce qui introduit une variété infinie pour une même formule de f en fonction des coordonnées (par définition la même *formule* $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ sur le domaine $x \geq 1$ ou sur $y \leq 2$ donne deux *fonctions* distinctes - fonction = formule + domaine).

Pour intégrer f il faudra tenir compte du domaine sur lequel on veut faire l'intégration - comme d'ailleurs dans le cas des fonctions numériques d'une seule variable.

Mais autant les domaines de définition des fonctions d'une variable sont très simples, autant les domaines du plan (ou de l'espace) peuvent avoir des formes très compliquées. Pour parvenir à étudier - par exemple intégrer - une fonction de plusieurs variables, il faudra d'abord *visualiser* le domaine où elle est définie, et si possible le *dessiner* (schématiquement).

Pour tracer un domaine élémentaire on doit tracer une intersection de domaines de base. Et **pour tracer un domaine de base** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ c(x, y) \geq 0\}$ on commence par tracer la courbe $c(x, y) = 0$ qui délimite ce domaine. On doit ensuite choisir de quel côt se trouve D par rapport cette courbe. Pour cela on choisit un point $M_i = (x_i, y_i)$ dans chacune des rgions R_i du plan priv de la courbe $c(x, y) = 0$, et on value $c(x_i, y_i)$: la rgion R_i fait partie du domaine D si et seulement si $c(x_i, y_i) > 0$.

Définition 2.10 (fonction continue)**.**
Soit D un domaine (du plan ou de l'espace). Une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est *continue (sur D)* si pour tout point $p = (x, y)$ dans le domaine D et toute suite $(p_n)_{n\geq 0} = (x_n, y_n)_{n\geq 0}$ de points de D tendant vers p (c'est à dire $\lim x_n = x$ et $\lim y_n = y$), on a $\lim f(p_n) = f(p)$.

De même une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est *continue (sur D)* si pour tout point $p = (x, y, z)$ dans le domaine D et toute suite $(p_n)_{n\geq 0} = (x_n, y_n, z_n)_{n\geq 0}$ de points de D tendant vers p (c'est à dire $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$ et $\lim z_n = z$), on a $\lim f(p_n) = f(p)$.

Les fonctions usuelles sont toujours continues sur leur domaine de définition, et plus généralement sur tout domaine contenu dans le domaine de définition.

3. Définition de l'intégrale.

3.1. Intégrale d'une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Soit D un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction numérique continue. On approxime d'abord D par une union finie de carrés intérieurs.

Plus précisément :

Pour A un point du plan de coordonnées (x, y) et $c > 0$ une longueur donnée, notons Carré(A, c) le carré (fermé) de sommets les points A' de coordonnées (x', y') avec $x' = x$ ou $x' = x + c$, et $y' = y$ ou $y' = y + c$. Donc Carré(A, c) est le carré de côté c, dont A est un sommet, et dont tous les autres points ont des coordonnées $\geq$ aux coordonnées de A.

Soit $n \geq 0$ un entier (pensé assez grand). Soit E_n $(= E_n(D))$ l'ensemble des points A dont les coordonnées sont de la forme $(r, s) = (\frac{k}{2^n}, \frac{\ell}{2^n})$ où $(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$, et de plus tout le carré Carré$(A, \frac{1}{2^n})$ est contenu dans D. La n-me somme de Riemann est la somme

$$S(f, n) = \sum_{A\in E_n} f(A).\frac{1}{2^{2n}}$$

Noter que cette somme peut être nulle : si le domaine est de taille petite par rapport à $\frac{1}{2^n}$ alors aucun carré de côté $\frac{1}{2^n}$ n'est contenu dans D, donc $E_n = \emptyset$. En revanche comme D est borné l'ensemble E_n est toujours fini, donc la somme de Riemann $S(f,n)$ est finie.

Nous admettrons le résultat suivant, dont la preuve est similaire à celle du théorème de convergence des sommes de Riemann des fonctions numériques $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Théorème 3.1 (convergence des sommes de Riemann vers l'intégrale double)**.**
Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur D régulier borné. Supposons que f est définie et continue sur un domaine $\overline{D}$ qui contient D et qui de plus est régulier, borné et **fermé**. *Alors quand $n \to +\infty$, les sommes de Riemann $S(f,n)$ ont une limite finie, qui sera notée $\int_D f(x,y)dxdy$ (parfois $\iint_D f(x,y)dxdy$ en physique).*

Si à chaque pas n dans les sommes $S(f,n)$ on remplace $f(A)$ par $f(B)$, où B est un point arbitraire dans le carré Carré$(A, \frac{1}{2^n})$, alors les sommes de Riemann correspondantes convergent aussi et elles ont la même limite.

Remarque 3.2.

(1) Une condition suffisante de convergence des sommes de Riemann est donc que le domaine d'intégration D de la fonction continue soit borné, régulier et **fermé**.
(2) Même si la définition est donnée pour f continue quelconque, les calculs explicites ne pourront être faits que pour f usuelle, qui plus est sur des domaines D très simples.

Mise en garde 3.3. La condition " f définie continue sur un domaine fermé contenant D " est essentielle dans le théorème ci-dessus ! Penser à $(x,y) \mapsto \frac{1}{x}$ sur le carré $D =]0,1] \times [0,1]$.

3.2. **Intégrale d'une fonction** $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$**.**

Soit D un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction numérique continue. On approxime d'abord D par un domaine union de cubes.

Pour A un point de l'espace de coordonnées (x,y,z) et $c > 0$ une longueur donnée, notons Cube(A,c) le cube (fermé) de sommets A' de coordonnées (x',y',z') avec $x' = x$ ou $x' = x+c$, $y' = y$ ou $y' = y+c$, et $z' = z$ ou $z' = z+c$. Donc Cube(A,c) est le cube de côté c, dont A est un sommet, et dont tous les autres points ont des coordonnées $\geq$ aux coordonnées de A.

Pour $n \geq 0$ un entier soit E_n $(= E_n(D))$ l'ensemble des points A dont les coordonnées sont de la forme $(r,s,t) = (\frac{k}{2^n}, \frac{\ell}{2^n}, \frac{m}{2^n})$ où $(k,\ell,m) \in \mathbb{Z}^3$ et de plus le cube Cube$(A, \frac{1}{2^n})$ est contenu dans D. La n-me somme de Riemann associée est

$$S(f,n) = \sum_{A \in E_n} f(A).(\frac{1}{2^n})^3$$

Théorème 3.4 (convergence des sommes de Riemann vers l'intégrale triple)**.**
Soit $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur D régulier borné. Supposons que f est définie et continue sur un domaine $\overline{D}$ qui contient D et qui de plus est régulier, borné et **fermé**. *Alors quand $n \to +\infty$ les sommes de Riemann $S(f,n)$ ont une limite finie, notée $\int_D f(x,y,z)dxdydz$ (parfois $\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$ en physique).*

De plus si à chaque pas n dans les sommes $S(f,n)$ on remplace $f(A)$ par $f(B)$, où B est un point arbitraire dans le cube Cube$(A, \frac{1}{2^n})$, alors les sommes ont la même limite.

Remarquer que la notation $\int dxdy$ ou $\int dxdydz$ est directement liée à la définition par limite de sommes de Riemann.

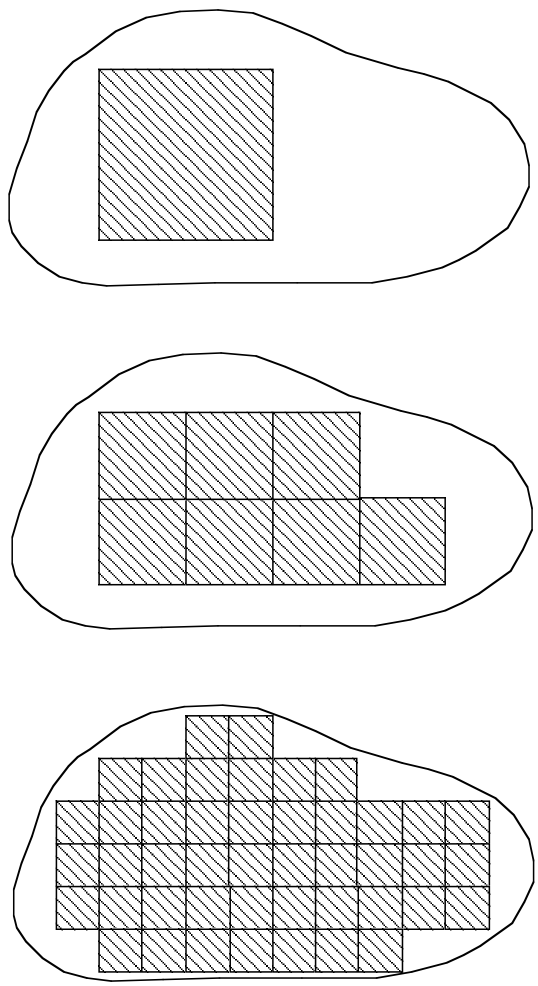
Définition 3.5 (aires et volumes)**.** Soit D un domaine régulier borné de $\mathbb{R}^2$. Alors l'*aire de D* est par définition

$$\text{Aire}(D) = \int_D 1 \; dxdy$$

Soit D un domaine régulier borné de $\mathbb{R}^3$. Alors le *volume de D* est par définition

$$\text{Volume}(D) = \int_D 1 \; dxdydz$$

Aire d'un domaine du plan



La fonction constante 1 est continue sur tout le plan ou l'espace, et le domaine D borné est contenu dans un disque fermé ou une boule fermée. Donc l'aire (ou le volume) de tout domaine borné du plan (ou de l'espace) est finie d'après le théorème général de convergence des sommes de Riemann.

Mais en fait il est facile de voir que pour chaque domaine D borné, les sommes de Riemann de la fonction constante égale à 1 forment d'une part une suite *croissante*, d'autre part une suite *majorée*. Ainsi les sommes de Riemann définissant l'aire et le volume convergent par un argument plus élémentaire.

Pour le vrifier on introduit d'abord le domaine polygonal (ou polyèdral) $P_n(D)$, union des carrés (ou des cubes) intervenant dans la définition des sommes de Riemann. Autrement dit

$$P_n(D) = \cup_{A \in E_n(D)} \text{Carré}(A, \frac{1}{2^n}) \text{ ou } P_n(D) = \cup_{A \in E_n(D)} \text{Cube}(A, \frac{1}{2^n})$$

Pour viter les confusions on notera 1_D la fonction constante gale 1 sur le domaine D.

Les preuves (lmentaires) des rsultats suivants sont laisses au lecteur :

Lemme 3.6 (croissance de $P_n(D)$ par rapport à D)**.** *Si $D_1 \subset D_2$ alors $E_n(D_1) \subset E_n(D_2)$, $P_n(D_1) \subset P_n(D_2)$ et de plus*

$$S_n(1_{D_1}) = S_n(1_{P_n(D_1)}) \leq S_n(1_{P_n(D_2)}) = S_n(1_{D_2}).$$

Lemme 3.7 (domaines D pour lesquels les approximations $P_n(D)$ sont stationnaires)**.** *Soit D un domaine. Supposons qu'il existe un entier $n \geq 0$ pour lequel D est une union finie de carrs de la forme Carr$(A, \frac{1}{2^n})$ avec $A = (\frac{p}{2^n}, \frac{q}{2^n})$ pour $p, q \in \mathbb{Z}$ (ou de cubes Cube$(A, \frac{1}{2^n})$ avec $A = (\frac{p}{2^n}, \frac{q}{2^n}, \frac{r}{2^n})$ pour $p, q, r \in \mathbb{Z}$).*

Alors pour tout entier $m \geq n$ on a $P_m(D) = D$ et de plus $S_m(1_D) = S_n(1_D)$.

En particulier on voit dj que

$$\text{Aire}(\text{Carr}(A, c)) = c^2$$

pour peu que $A = (\frac{p}{2^n}, \frac{q}{2^n})$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$, et $c = \frac{m}{2^n}$ avec $m \in \mathbb{N}$. Et de même

$$\text{Volume}(\text{Cube}(A, c)) = c^3$$

pour peu que $A = (\frac{p}{2^n}, \frac{q}{2^n}, \frac{r}{2^n})$ avec $p, q, r \in \mathbb{Z}$, et $c = \frac{m}{2^n}$ avec $m \in \mathbb{N}$.

Corollaire 3.8 (majoration de $S_n(1)$ lorsque D est borné)**.**

Supposons que $D \subset Q$, avec Q un carré (ou un cube) de côté c, dont les sommets ont des coordonnées entières. Alors $P_n(D) \subset Q$ et en conséquence sur D on a:

$$S_n(1) \leq c^2 \text{ (ou } c^3)$$

Corollaire 3.9 (croissance de $S_n(1_D)$ par rapport à n)**.**

Si $n \leq m$ alors on a

$$S_n(1_D) = S_n(1_{P_n(D)}) \leq S_n(1_{P_m(D)}) = S_m(1_D)$$

Les sommes de Riemann $S_n(1_D)$ tant croissantes, positives et bornes, elles admettent bien une limite finie positive.

3.3. **Quelques propriétés géométriques simples de l'aire (et du volume).**

En passant à la limite dans le Lemme 3.6 il vient immédiatement :

Lemme 3.10 (Croissance de l'aire et du volume)**.**
Si $D_1 \subset D_2$ sont des domaines réguliers bornés du plan alors Aire$(D_1) \leq$ Aire(D_2).
Si $D_1 \subset D_2$ sont des domaines réguliers bornés de l'espace alors Volume$(D_1) \leq$ Volume(D_2).

Les propriétés suivantes sont aussi des conséquences assez faciles de la définition. Elles utilisent des petites manipulations géométriques et le fait que tout nombre réel x est, par dichotomie, limite d'une suite de nombres de la forme $(\frac{p_n}{2^n})$ (prendre pour p_n la partie entière de $2^n x$).

1) Pour tout rectangle R de côtés parallèles aux axes, de longueurs a, b on a :

$$\text{Aire}(R) = a \times b$$

2) (Découpage vertical ou horizontal) Pour tout domaine (régulier borné) D et toute abscisse x_0, décomposons D comme union

$$D = D_{x \leq x_0} \cup D_{x \geq x_0}$$

avec $D_{x \leq x_0} = \{(x, y) \in D, x \leq x_0\}$, et $D_{x \geq x_0} = \{(x, y) \in D, x \geq x_0\}$. Alors

$$\text{Aire}(D) = \text{Aire}(D_{x \leq x_0}) + \text{Aire}(D_{x \geq x_0})$$

On a de même pour toute ordonnée fixée y_0 :

$$\text{Aire}(D) = \text{Aire}(D_{y \leq y_0}) + \text{Aire}(D_{y \geq y_0})$$

En particulier si D est un segment (vertical ou horizontal) alors Aire$(D) = 0$.

Applications :

a) Les domaines polygonaux $P_n(D)$ (découpés en petits carrés de côtés parallèles aux axes) ont pour aire le nombre de petits carrés, multiplié par $(\frac{1}{2^n})^2$ (ce qui est bien la formule attendue). En fait pour ces domaines polygonaux $P_n(D)$ les sommes de Riemann sont constantes pour $k \geq n$.

b) Et donc pour tout domaine régulier borné D, l'aire de D est la limite de l'aire “classique” du domaine polygonal $P_n(D)$.

3) Invariance par translation : si un domaine D' se déduit d'un domaine D par translation alors Aire$(D) =$ Aire(D') (ou Volume$(D) =$ Volume(D')).

Lemme 3.11 (Aire sous la courbe et intégrale)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et supposons que $f(x) \geq y_0$ pour tout $x \in [a, b]$. Considérons alors le domaine*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, y_0 \leq y \leq f(x)\}$$

Alors Aire$(D) = \int_a^b [f(x) - y_0] dx$.

Esquisse de preuve lorsque $a = 0, b = 1$ et $y_0 = 0$. La quantité de gauche, Aire(D), est une limite de sommes de Riemann. En ajoutant toutes les aires des carrés dans une même colonne on trouve l'aire d'un rectangle de base $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$, et de hauteur le plus grand nombre h de la forme $\frac{p}{2^n}$ et tel que $h \leq f(x)$ pour tout x dans $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$. En d'autres termes, si on pose $m_{k,n} = \min_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]} f(x)$, on a

$$h \leq m_{k,n} \leq h + \frac{1}{2^n}$$

On peut donc comparer facilement la somme de Riemann $S_n(1_D)$ avec la somme de Riemann infrieure $\underline{S}_{2^n}(f)$ pour f sur $[0, 1]$:

$$0 \leq \underline{S}_{2^n}(f) - S_n(1) \leq (\sum_{k=0}^{k=2^n-1} \frac{1}{2^n}) \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n}$$

On conclut en passant la limite. □

On retrouve donc de façon rigoureuse l'idée que l'intégrale c'est l'aire sous la courbe. Et on en déduit les formules classiques pour les surfaces planes usuelles : polygone, disque, secteur ...

Avec un argument similaire de sommation en colonnes on obtiendrait :

Lemme 3.12 (Formule de l'aire entre deux courbes)**.** *Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, et supposons que $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$. Considérons alors le domaine*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

On a Aire(D) $= \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$.

3.4. **Interprêtation géométrique des intégrales doubles.**

On vient de montrer rigoureusement que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ positive est l'aire "sous la courbe représentative de f", autrement dit l'aire du domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$. Il y a un lien similaire entre les intgrales doubles de fonction $f(x, y) \geq 0$ et le volume d'un certain solide.

Soit D est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, et soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f peut être représentée géométriquement par la surface $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in D \text{ et } z = f(x, y)\}$ au dessus de D.

Supposons $f \geq 0$. Alors par dfinition le solide sous la surface représentative de f est

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in D \text{ et } 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

On a:

Théorème 3.13 (Interprêtation géométrique de l'intégrale)**.** *Si $f \geq 0$ soit S le solide sous la surface représentative de f. Alors*

$$\int_D f(x, y)dxdy = \textit{Volume}(S).$$

C'est par exemple une consquence immdiate du thorme de Fubini (voir Thorme 5.1).

4. Propriétés générales de l'intgrale multiple.

4.1. **Les courbes du plan et les surfaces de l'espace sont invisibles pour l'intégrale.**

L'aire d'une courbe régulière $c(x, y) = 0$ est nulle. Le volume d'une surface régulière $s(x, y, z) = 0$ est nul. Plus généralement l'intégrale double (ou triple) sur une courbe (ou une surface) est nulle.

Proposition 4.1. *Soit $C = \{c(x, y) = 0\}$ une courbe régulière du plan $\mathbb{R}^2$. Alors pour toute fonction continue $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie sur un domaine régulier borné fermé D, on a*

$$\int_{C \cap D} f(x, y)\ dxdy = 0$$

De même soit $S = \{s(x, y, z) = 0\}$ une surface régulière de l'espace $\mathbb{R}^3$. Alors pour toute fonction continue $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie sur un domaine régulier borné fermé D, on a

$$\int_{S \cap D} f(x, y, z)\ dxdydz = 0$$

4.2. **Propriétés algébriques de l'intégrale.**

Les propriétés suivantes sont vraies pour les sommes de Riemann - donc en passant à la limite elles sont vraies pour l'intégrale.

Proposition 4.2 (l'intégrale est linéaire)**.**
1) Si f, g sont continues sur D fermé borné régulier alors $\int_D (f+g) = \int_D f + \int_D g$.
2) Si $a \in \mathbb{R}$ et f est continue sur D fermé borné régulier alors $\int_D af = a \int_D f$.

4.3. **Majorations, minorations.**

Proposition 4.3 (l'intégrale est croissante par rapport à la fonction)**.**
Si $f \geq g$ alors $\int_D f \geq \int_D g$.

Comme conséquences on obtient par exemple :

Corollaire 4.4.
(1) *Si $f \geq 0$ alors $\int_D f \geq 0$.*
(2) $|\int_D f| \leq \int_D |f|$.
(3) *(ingalit fondamentale)*

$$\big(\min_{(x,y)\in D} f(x,y)\big)\ \big(Aire(D)\big) \leq \int_D f(x,y)dxdy\ \leq \big(\max_{(x,y)\in D} f(x,y)\big)\ \big(Aire(D)\big)$$

$$\big(\min_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z)\big)\ \big(Volume(D)\big) \leq \int_D f(x,y,z)dxdydz\ \leq \big(\max_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z)\big)\ \big(Volume(D)\big)$$

Clairement si $f = 0$ (la fonction nulle) $\int_D f = 0$. On peut se demander quand est-ce que l'implication réciproque est vraie: quand est-ce que $\int_D f = 0$ implique $f = 0$.

Proposition 4.5.
Soit D un domaine régulier borné fermé.
Si f est continue et positive sur D, alors $f = 0 \iff \int_D f = 0$.
Si f est continue de signe quelconque sur D, alors $f = 0 \iff \int_D |f| = 0$.

4.4. **Découpage des domaines.**

Théorème 4.6 (découpage élémentaire)**.** *Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine régulier borné contenu dans un domaine régulier borné fermé $\overline{D} \subset \mathbb{R}^2$, et soit $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient $\Delta_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, c(x,y) \geq 0\}$ et $\Delta_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, c(x,y) < 0\}$. Ainsi $D = D_1 \sqcup D_2$ avec $D_1 = D \cap \Delta_1$ et $D_1 = D \cap \Delta_1$. Alors*

$$\int_{D=D_1\sqcup D_2} f(x,y)dxdy = \int_{D_1} f(x,y)dxdy + \int_{D_2} f(x,y)dxdy$$

Plus généralement :

Théorème 4.7 (découpage)**.** *Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine régulier borné contenu dans un domaine régulier borné fermé $\overline{D} \subset \mathbb{R}^2$, et soit $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient $\Delta_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, c_1(x,y) \geq 0, \ldots, c_k(x,y) \geq 0\}$ et $\Delta_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \Delta_1$ le complémentaire de Δ_1, i.e. $\Delta_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, c_1(x,y) < 0,$ ou $c_2(x,y) < 0, \ldots,$ ou $c_k(x,y) < 0\}$. Ainsi $D = D_1 \sqcup D_2$ avec $D_1 = D \cap \Delta_1$ et $D_1 = D \cap \Delta_1$. Alors*

$$\int_{D=D_1\sqcup D_2} f(x,y)dxdy = \int_{D_1} f(x,y)dxdy + \int_{D_2} f(x,y)dxdy$$

En fait si on pose $\Delta_2' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, c_1(x,y) \leq 0,\ \text{ou } c_2(x,y) \leq 0, \dots,\ \text{ou } c_k(x,y) \leq 0\}$ puis $D_2' = D \cap \Delta_2'$ on peut découper selon le Théorème 4.7 pour obtenir

$$\int_{D_2'} f(x,y)dxdy = \int_{D_2} f(x,y)dxdy + \int_{D \cap c(x,y)=0} f(x,y)dxdy = \int_{D_2} f(x,y)dxdy$$

(Car on ne change pas une intégrale en enlevant ou en rajoutant les courbes au bord.)

Et on a donc tout aussi bien (avec les notations prcdentes):

Corollaire 4.8.

$$\int_{D=D_1 \cup D_2'} f(x,y)dxdy = \int_{D_1} f(x,y)dxdy + \int_{D_2'} f(x,y)dxdy$$

On a le même type de propriétés dans l'espace, avec les mêmes arguments :

Théorème 4.9. *Soit $D \subset \mathbb{R}^3$ un domaine régulier borné contenu dans un domaine régulier borné fermé $\overline{D} \subset \mathbb{R}^3$, et soit $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient $\Delta_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, s_1(x,y,z) \geq 0, \dots, s_\ell(x,y,z) \geq 0\}$ et $\Delta_2 = \mathbb{R}^3 \setminus \Delta_1$ le complémentaire de Δ_1, i.e. $\Delta_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, s_1(x,y,z) < 0,\ \text{ou } s_2(x,y,z) < 0, \dots,\ \text{ou } s_\ell(x,y,z) < 0\}$. Alors*

$$\begin{aligned}\int_{D=D_1 \sqcup D_2} f(x,y,z)dxdydz &= \int_{D_1} f(x,y,z)dxdydz + \int_{D_2} f(x,y,z)dxdydz \\ &= \int_{D_1} f(x,y,z)dxdydz + \int_{D_2'} f(x,y,z)dxdydz\end{aligned}$$

Noter que les relations de découpage des intégrales obtenues dans le plan ou l'espace généralisent la relation de Chasles pour les intégrales $\int_a^b f(x)dx$.

Comme conséquence du découpage :

Proposition 4.10 (approximation par des domaines polygonaux ou polyèdraux)**.** *Pour tout domaine borné D du plan (ou de l'espace) et pour tout entier $n \geq 0$, notons comme d'habitude $P_n(D)$ le domaine polygonal (ou polyèdral) apparaissant dans la définition des sommes de Riemann d'ordre n. Soit $R_n(D)$ le domaine ("résiduel") défini par*

$$R_n(D) = D \setminus P_n(D)$$

Alors

$$\mathit{Aire}(D) = \mathit{Aire}(P_n(D)) + \mathit{Aire}(R_n(D)) \ (\text{ou } \mathit{Volume}(D) = \mathit{Volume}(P_n(D)) + \mathit{Volume}(R_n(D)))$$

Donc l'aire (ou le volume) de $R_n(D)$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, de même que l'aire de $P_n(D)$ tend vers celle de D (ou le volume).

Et pour toute fonction continue sur un domaine fermé borné contenant D on a

$$\int_{D_n} f \to \int_D f \ \text{ et } \int_{D \setminus D_n} f \to 0$$

5. Le théorème de Fubini.

C'est l'outil essentiel pour le calcul explicite des intégrales multiples, car il ramène le calcul des intégrales doubles au calcul des intégrales simples, et celui des intégrales triples à celui des intégrales doubles.

5.1. **Fubini dans le plan.**

Un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ est dit *en piles* (ou en *tranches verticales*) est un domaine de la forme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, \psi(x) \leq y \leq \phi(x)\}$, où $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues usuelles telles que $\psi(x) \leq \phi(x)$ pour $x \in [a, b]$.

Théorème 5.1 (Fubini en piles)**.** *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un domaine régulier, fermé, borné. Supposons que D est* en piles *(ou en* tranches verticales*) , c'est à dire que D est de la forme*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, \psi(x) \leq y \leq \phi(x)\}$$

où $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues usuelles telles que $\psi(x) \leq \phi(x)$ pour $x \in [a, b]$.

Alors l'intégrale partielle $\int_{\psi(x_0)}^{\phi(x_0)} f(x_0, y)dy$ est bien définie pour tout $x_0 \in [a, b]$ fixé. De plus la fonction $x \mapsto \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} f(x, y)dy$ est continue sur $[a, b]$ et on a

$$\int_a^b \big(\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} f(x, y)dy \big) dx = \int_D f(x, y)dxdy$$

Esquisse de vrification. On vrifie la formule dans le cas très particulier où D est un rectangle,

$$D = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b \text{ et } c \leq y \leq d\},$$

et de plus il existe deux fonctions continues $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $h : [c, d] \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $(x, y) \in D$ on a

$$f(x, y) = g(x)h(y)$$

On note que le domaine D est bien en pile, avec $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ constante gale c et $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ constante gale d.

Dans ce cas pour $x_0 \in [a, b]$ fix la fonction $f(x_0, y)$ vaut $g(x_0)h(y)$, clairement continue par rapport y puisque constante fois $h(y)$. A x fix l'intgrale partielle vaut

$$\int_{y=c}^{y=d} g(x)h(y)dy = g(x)\big(\int_c^d h(y)dy \big)$$

Ceci dfinit bien une fonction continue par rapport x (puisque constante fois $g(x)$), dont l'intgrale vaut :

$$\int_{x=a}^{x=b} [g(x)\big(\int_c^d h(y)dy \big)]dx = \big(\int_a^b g(x)dx \big)\big(\int_c^d h(y)dy \big)$$

Nous devons donc montrer la formule (**trs utile pour les calculs**) :

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} g(x)h(y)dxdy = \big(\int_a^b g(x)dx \big)\big(\int_c^d h(y)dy \big)$$

Pour simplifier le calcul supposons $a = c = 0, b = d = 1$, mais l'argument est semblable pour a, b, c, d quelconques.

L'ide est de réorganiser les termes dans la n-me somme de Riemann de f sur D, en les regroupant par tranches verticales. Cela s'écrit :

$$\begin{aligned} S_n(f) &= \sum_{x=0,\frac{1}{2^n},\frac{2}{2^n},\frac{3}{2^n},\dots,\frac{2^n-1}{2^n}} [\sum_{y=0,\frac{1}{2^n},\frac{2}{2^n},\frac{3}{2^n},\dots,\frac{2^n-1}{2^n}} f(x,y)(\frac{1}{2^n})^2] \\ &= \sum_{x=0,\frac{1}{2^n},\frac{2}{2^n},\frac{3}{2^n},\dots,\frac{2^n-1}{2^n}} [\sum_{y=0,\frac{1}{2^n},\frac{2}{2^n},\frac{3}{2^n},\dots,\frac{2^n-1}{2^n}} g(x)h(y)\frac{1}{2^n}]\frac{1}{2^n} \\ &= \sum_{x=0,\frac{1}{2^n},\frac{2}{2^n},\frac{3}{2^n},\dots,\frac{2^n-1}{2^n}} [\sum_{y=0,\frac{1}{2^n},\frac{2}{2^n},\frac{3}{2^n},\dots,\frac{2^n-1}{2^n}} h(y)\frac{1}{2^n}]g(x)\frac{1}{2^n} \\ &= [\sum_{x=0,\frac{1}{2^n},\frac{2}{2^n},\frac{3}{2^n},\dots,\frac{2^n-1}{2^n}} g(x)\frac{1}{2^n}][\sum_{y=0,\frac{1}{2^n},\frac{2}{2^n},\frac{3}{2^n},\dots,\frac{2^n-1}{2^n}} h(y)\frac{1}{2^n}] \\ &= S_{2^n}(g) \times S_{2^n}(h) \end{aligned}$$

En passant à la limite on trouve la relation attendue

$$\int_D f(x,y)dxdy = (\int_0^1 g(x)dx)(\int_0^1 h(y)dy) \ .$$

□

Théorème 5.2 (Fubini en tranches). *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un domaine régulier, fermé, borné. Supposons que D D est* en tranches (horizontales) *, c'est à dire que D est de la forme*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, a \leq y \leq b, \psi(y) \leq x \leq \phi(y)\}$$

où $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues usuelles telles que $\psi(y) \leq \phi(y)$ pour $y \in [a,b]$.

Alors l'intégrale partielle $\int_{\psi(y_0)}^{\phi(y_0)} f(x,y_0)dx$ est bien définie pour tout $y_0 \in [a,b]$ fixé. De plus la fonction $y \mapsto \int_{\psi(y)}^{\phi(y)} f(x,y)dx$ est continue sur $[a,b]$ et on a

$$\int_a^b \big(\int_{\psi(y)}^{\phi(y)} f(x,y)dx\big)dy = \int_D f(x,y)dxdy$$

En général on utilisera Fubini en piles et / ou Fubini en tranches après avoir découpé convenablement le domaine d'intégration.

Remarque: Fubini (en piles) appliqué au calcul de l'aire de l'hypographe ≥ 0 d'une fonction redonne l'intégrale unidimensionnelle.

Comme conséquence de Fubini, voici un premier résultat (simple) de changement de variables.

Corollaire 5.3 (effet d'une dilatation des coordonnées). *Soient λ, μ deux réels $\neq 0$. On considère la fonction $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui transforme (x,y) en $(\lambda x, \mu y)$.*

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine du plan, $D' = \phi(D)$ son image par ϕ, et $f : D' \to \mathbb{R}$.

Alors

$$\int_{D'} f(x',y')dx'dy' = \int_D f(\lambda x, \mu y)|\lambda||\mu|dxdy$$

Par exemple si D est un rectangle de la forme $[a,b]\times[c,d]$ (donc x varie de a à b et y varie de c à d), et si λ,μ sont >0 alors D' est le rectangle $[\lambda a,\lambda b]\times[\mu c,\mu d]$. Et si f est la fonction constante 1, la relation prédite par l'énoncé est simplement que l'aire de l'image D' n'est pas égale à l'aire de D, mais à l'aire de D multipliée par $\lambda\mu$ - ce qui est évident.

Ainsi une homothétie de rapport k multiplie les aires par k^2.

Pour $\lambda=1$ et $\mu=-1$ on voit que l'intgrale est "invariante" par symtrie orthogonale par rapport l'axe de x :

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_{\overline{D}} f(x,-y)dxdy$$

(avec $\overline{D}$ le symtrique orthogonal de D par rapport l'axe de x)

5.2. Fubini dans l'espace.

Théorème 5.4 (Fubini sur un cylindre)**.** *Soit $f : D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur un domaine régulier, fermé, borné. Supposons que D est* en piles *(ou en* tranches verticales*) , c'est à dire que D est de la forme*

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,(x,y)\in\Delta,\psi(x,y)\le z\le\phi(x,y)\}$$

où Δ est un domaine régulier, borné, fermé et $\phi:\Delta\to\mathbb{R}$ et $\psi:\Delta\to\mathbb{R}$ sont des fonctions continues usuelles telles que $\psi(x,y)\le\phi(x,y)$ pour $(x,y)\in\Delta$.

Alors l'intégrale partielle $\int_{\psi(x_0,y_0)}^{\phi(x_0,y_0)} f(x_0,y_0,z)dz$ est bien définie pour tout $(x_0,y_0)\in\Delta$ fixé. De plus la fonction $(x,y)\mapsto\int_{\psi(x,y)}^{\phi(x,y)} f(x,y,z)dz$ est continue sur Δ et on a

$$\int_\Delta\Big(\int_{\psi(x,y)}^{\phi(x,y)} f(x,y,z)dz\Big)dxdy=\int_D f(x,y,z)dxdydz$$

On peut bien sûr appliquer Fubini sur un cylindre d'axe de direction (Ox) ou (Oy) (donc D est de la forme $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,(y,z)\in\Delta,\psi(y,z)\le x\le\phi(y,z)\}$ ou D est de la forme $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,(x,z)\in\Delta,\psi(x,z)\le y\le\phi(x,z)\}$).

Théorème 5.5 (Fubini en tranches horizontales)**.** *Soit $f : D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur un domaine régulier, fermé, borné. Supposons que D est* en tranches horizontales*, c'est à dire que D est un domaine régulier, borné de la forme*

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,a\le z\le b,s(x,y,z)\ge 0\}$$

avec s est usuelle.

Pour $z\in[a,b]$ on notera D_z le domaine borné $D_z=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ s(x,y,z)\ge 0\}$ - qu'on suppose non vide pour tout $z\in[a,b]$.

Alors l'intégrale partielle $\int_{(x,y)\in D_{z_0}} f(x,y,z_0)dxdy$ est bien définie pour tout $z_0\in[a,b]$ fixé. De plus la fonction $z\mapsto\int_{D_z} f(x,y,z)dxdy$ est continue sur $[a,b]$ et on a

$$\int_a^b\Big(\int_{D_z} f(x,y,z)dxdy\Big)dz=\int_D f(x,y,z)dxdydz$$

Avec Fubini on peut retrouver toutes les formules classiques : aire d'un parallélogramme, d'un disque, d'une ellipse, volume d'une boule, d'une pyramide...

Dans le plan on a dj vu que si $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ est un rectangle et si $f : R \to \mathbb{R}$ est continue de la forme $f(x, y) = g(x)h(y)$ avec $g : [a, b] \to \mathbb{R}, h : [c, d] \to \mathbb{R}$ continues, on a

$$\int_R f(x, y)dxdy = \big(\int_a^b (g(x)dx\big)\big(\int_c^d (h(y)dy\big)$$

Par application de Fubini en tranche verticales dans l'espace on obtient un rsultat analogue : si $D \subset \mathbb{R}^3$ est un prisme $D = \Delta \times [c, d]$ (avec $\Delta \subset \mathbb{R}^2$) et si $f : D \to \mathbb{R}$ est continue de la forme $f(x, y, z) = g(x, y)h(z)$ avec $g : \Delta \to \mathbb{R}, h : [c, d] \to \mathbb{R}$ continues, on a

$$\int_R f(x, y, z)dxdydz = \big(\int_\Delta (g(x, y)dxdy\big)\big(\int_c^d (h(z)dz\big)$$

6. Changements de variables.

6.1. **Invariance par isométries.** Rappelons qu'une *isométrie.* de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ est une bijection $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (ou $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$) telle que

$$\text{distance euclidienne}(\phi(M), \phi(N)) = \text{distance euclidienne}(M, N).$$

Comme une isométrie conserve toutes les distances elle envoie un carré de côté c sur un carré de même côté (idem avec un cube). Donc en approximant tout domaine D par le domaine polygonal (polyèdral) $P_n(D)$ on obtient :

Théorème 6.1 (invariance de l'aire et du volume par isomtries)**.** *Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) un domaine régulier borné. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (ou $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$) une isométrie. Alors Aire$(\phi(D))$ = Aire(D) (ou Vol$(\phi(D))$ = Vol(D)).*

L'intégrale d'une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$, c'est le volume du solide S sous la surface reprsentative de f (par l'interprêtation gomtrique des intgrales doubles, voir Thorme 3.13). Quand on compose la fonction avec une isométrie $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, le solide S' sous la surface reprsentative de la fonction compose $f \circ \phi$ s'obtient en déplaçant S par une isométrie Ψ de $\mathbb{R}^3$. Prcisment : pour $\Psi(x, y, z) = (\phi^{-1}(x, y), z)$ on a $\Psi(S') = S$. Donc S et S' ont même volume et l'intégrale ne change pas. Ceci montre le résultat suivant.

Théorème 6.2.
Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine régulier fermé borné, soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une isométrie (une translation, ou une rotation, ou une symétrie orthogonale par rapport à une droite, ou une composée quelconque de symétries orthogonales par rapport à des droites), et soit $f : \phi(D) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors

$$\int_{\phi(D)} f(x', y')dx'dy' = \int_D f(\phi(x, y))dxdy$$

6.2. **Calculs en coordonnées polaires dans le plan.**
Passer en coordonnées polaires, c'est écrire $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, où r et θ varient dans un domaine R (à préciser) lorsque (x, y) décrivent un domaine donné S. Les "variables" x, y s'expriment donc en fonction des variables r, θ : donc quand on passe de x, y r, θ, on effectue bien un *changement de variables.* Lors de ce passage les fonctions $f(x, y)$ sur S se transforment en fonctions $g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ sur R.

Pour $-\frac{\pi}{2} < \theta_1 \le \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ et $0 < r_1 \le r_2$ le rectangle $R = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2, r_1 \le r \le r_2, \theta_1 \le \theta \le \theta_2\}$ correspond en (x, y) au rectangle curviligne

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, r_1^2 \le x^2 + y^2 \le r_2^2,\ x \ge 0,\ x\tan(\theta_1) \le y \le x\tan(\theta_2)\}.$$

L'aire d'un secteur angulaire de rayon r d'ouverture α est $\frac{1}{2}\alpha r^2$, donc l'aire du rectangle curviligne S est $\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)(r_2^2-r_1^2)$, ce n'est pas l'aire du rectangle R, la formule tentante $\int_R g(r,\theta)drd\theta = \int_S f(x,y)dxdy$ est donc fausse (pour $f=1$) ! Il faut donc impérativement introduire un coefficient pour pouvoir passer de l'intégration de f sur S à l'intégration de g sur R.

En fait la bonne formule est :

Théorème 6.3 (passage en coordonnées polaires)**.** *Notons $\phi : \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ l'application dfinie par $\phi(r,\theta)=(x,y)$ avec $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$*

Soit $\Delta\subset\mathbb{R}^+\times[-\pi,\pi]$ un domaine (fermé borné). Soit $D=\phi(\Delta)\subset\mathbb{R}^2$ le domaine correspondant (dans les variables (x,y)).

Alors pour toute fonction continue $f : D\to\mathbb{R}$ on a :

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta)\ \mathbf{r}\, drd\theta$$

De façon quivalente :

$$\int_\Delta g(r,\theta)drd\theta = \int_D \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

Remarque: c'est cohérent avec l'aire d'un secteur D', i.e. la formule est juste pour $f=1$ et $D=$ un rectangle.

Esquisse de preuve. On se contente de montrer la formule pour $\Delta=[a,b]\times[c,d]$, ensuite ce sera vrai pour tout domaine $\Delta\subset\mathbb{R}^+\times[-\pi,+\pi]$ en écrivant Δ comme une union croissante de domaines Δ_n qui se découpent en rectangles, de sorte que $\text{Aire}(\Delta\setminus\Delta_n)\to 0$.

Argument lorsque Δ est un rectangle, $\Delta=[a,b]\times[c,d]$, et $f : D\to\mathbb{R}$ est continue.

1. Dcoupage de Δ et de D.

On dcoupe maintenant Δ en n^2 petits rectangles Δ_{ij} de dimension $\frac{b-a}{n}\times\frac{d-c}{n}$. Ainsi $D=\pi(\Delta)$ est dcoups en petits rectangles curvilignes D_{ij}.

Par dcoupage on obtient :

$$\int_D f(x,y)dxdy = \sum_{ij}\int_{D_{ij}} f(x,y)dxdy$$

2. Formule de la moyenne (sur un rectangle).

Nous avons déjà remarqué que pour g continue sur un rectangle R, on a:

$$\text{Min}_{(s,t)\in R}(g(s,t))\times\text{Aire}(R)\le\int_R g(s,t)dsdt\le\text{Max}_{(s,t)\in R}(g(s,t))\times\text{Aire}(R)$$

Soit $A_1=(s_1,t_1)\in R$ un point où g atteint son minimum, et soit $A_2=(s_2,t_2)\in R$ un point où g atteint son maximum. Tout le segment $[A_1A_2]$ est dans le rectangle R, et comme g est continue la fonction $\gamma : [0,1]\ni u\mapsto g(us_2+(1-u)s_1, ut_2+(1-u)t_1)$ est continue sur $[0,1]$. Alors $\gamma(t)\le\text{Max}_{(s,t)\in R}(g(s,t))=\gamma(1)$, d'où $\text{Max}_{[0,1]}(\gamma(u))=\gamma(1)$. De même $\text{Min}_{[0,1]}(\gamma(u))=\gamma(0)$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires γ prend toutes les valeurs entre $\text{Min}_{(s,t)\in R}(g(s,t))$ et $\text{Max}_{(s,t)\in R}(g(s,t))$, donc pour un certain u_0 on a

$$\gamma(u_0)=\frac{\int_R g(s,t)dsdt}{\text{Aire}(R)}$$

Alors au point $A_0=(u_0s_2+(1-u_0)s_1, u_0t_2+(1-u_0)t_1)$ on a $g(A_0)=\frac{\int_R g(s,t)dsdt}{\text{Aire}(R)}$.

Nous admettons que la formule de la moyenne reste vraie sur tout rectangle curviligne. Plus gnralement elle est vraie sur tout domaine qui est “d’un seul tenant” , mais elle est fausse sur un domaine en deux morceaux spars, comme par exemple l’union disjointe de deux rectangles.

Appliquons donc la formule de la moyenne sur D_{ij}. Donc il existe des points $B_{ij} \in D_{ij}$ tels que :

$$\int_{D_{ij}} f(x,y)dxdy = f(B_{ij}) \times \text{Aire}(D_{ij})$$

3. Le coeur de la formule : le quotient $\frac{\textbf{Aire}(D_{ij})}{\textbf{Aire}(\Delta_{ij})}$.

On a $\text{Aire}(\Delta_{ij}) = \frac{1}{n^2}(b-a)(d-c)$ et $\text{Aire}(D_{ij}) = \frac{1}{2}\frac{d-c}{n}[(a+i\frac{b-a}{n})^2 - (a+(i-1)\frac{b-a}{n})^2] = \frac{1}{2}\frac{d-c}{n}\frac{b-a}{n}[2(a+(i-1)\frac{b-a}{n}+\frac{b-a}{n}] = \frac{1}{n^2}(b-a)(d-c)[r(\text{sommet de}\Delta_{ij})+\frac{b-a}{2n}] = \text{Aire}(\Delta_{ij})[r(\text{sommet de}\Delta_{ij})+\frac{b-a}{2n}]$.

Ainsi, à une quantité négligeable près,

$$\text{Aire}(D_{ij}) \simeq \text{Aire}(\Delta_{ij}) r(\text{sommet de}\Delta_{ij})$$

On comprend l’origine du facteur r dans la formule $...rdrd\theta$.

En fait en notant A'_{ij} le point de Δ_{ij} tel que $B_{ij} = \pi(A'_{ij})$ on peut crire $f(B_{ij})\text{Aire}(D_{ij}) = [f(B_{ij})r(A'_{ij}) + E_{ij}(n)]\text{Aire}(\Delta_{ij})$ o le terme d’erreur $E_{ij}(n)$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

On voit que le terme $f(B_{ij})r(A'_{ij})\text{Aire}(\Delta_{ij}$ correspond $(f\circ\pi)(A'_{ij})r(A'_{ij})\text{Aire}(\Delta_{ij})$, ce qui montre pourquoi il faut comparer l’intgrale de $f(x,y)$ avec celle de $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) \times r$.

4. Fin de l’argument.

Appliquons alors la formule de la moyenne sur Δ_{ij} pour la fonction g : il existe $A_{ij} \in \Delta_{ij}$ tel que :

$\int_{\Delta_{ij}} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)drd\theta = r(A_{ij})f(\pi(A_{ij})) \times \text{Aire}(\Delta_{ij})$.

Nous obtenons enfin :

$$|\int_{D_{ij}} f(x,y)dxdy - \int_{\Delta_{ij}} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)drd\theta|$$

$$= [f(B_{ij})r(A'_{ij}) + E_{ij}(n)]\text{Aire}(\Delta_{ij}) - r(A_{ij})f(\phi(A_{ij})) \times \text{Aire}(\Delta_{ij})$$

$$\leq \text{Aire}(\Delta_{ij}) \times |[g(A'_{ij})) - g(A_{ij})] + f(\phi(A'_{ij}))\frac{b-a}{2n}]|$$

Le premier et le deuxième terme deviennent $< \varepsilon$ pour n assez grand, donc pour n assez grand :

$$|\int_{D_{ij}} f(x,y)dxdy - \int_{\Delta_{ij}} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)drd\theta| \leq \varepsilon\text{Aire}(\Delta_{ij})$$

Il en résulte que

$$|\int_D f(x,y)dxdy - \int_\Delta rf(r\cos\theta, r\sin\theta)drd\theta| \leq \varepsilon(\sum_{ij}\text{Aire}(\Delta_{ij})) = \varepsilon\text{Aire}(\Delta)$$

Les deux intégrales sont donc égales.

□

Remarque : ce qu’il faut retenir de cette preuve c’est que ce qui compte dans le changement de variable c’est la façon dont ϕ transforme l’aire des rectangles infinitésimaux : le rectangle curviligne infinitésimal en x, y correspondant au rectangle infinitésimal $[r, r+dr] \times [\theta, \theta+d\theta]$ a pour aire $rdrd\theta$.

3) Application.

On pose $I(A) = \int_{-A}^{+A} e^{-t^2}dt$. Déterminer $\lim_{t\to+\infty} I(A)$.

Attention : $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive, mais cette primitive n'est pas une fonction usuelle.

L'astuce est d'introduire $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ et de l'intégrer sur divers domaines.

a) Par Fubini $[I(A)]^2 = \int_{R_A} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ avec $R_A = [-A,+A]^2$.

b) En polaires : $\int_{D_A} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_{0\le r\le A,-\pi\le\theta\le+\pi} re^{-r^2}drd\theta = \pi(1-e^{-A^2})$ avec $D_A = \{x^2+y^2 \le A^2\}$.

c) Encadrement : on a $D_A \subset R_A \subset D_{\sqrt{2}A}$ et $f \ge 0$ donc

$$\int_{D_A} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \le \int_{R_A} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \le \int_{D_{\sqrt{2}A}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

Soit $\pi(1-e^{-A^2}) \le [I(A)]^2 \le \pi(1-e^{-2A^2})$ et donc $\lim_{t\to+\infty} I(A) = \sqrt{\pi}$.

6.3. **Calculs en coordonnées cylindriques dans l'espace.**

On peut représenter tout point (x,y,z) de l'espace $\mathbb{R}^3$ sous la forme $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$ avec $r \in [0,+\infty[, \theta \in [-\pi,\pi], z \in \mathbb{R}$. Autrement dit si on pose $\phi(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ on peut représenter tout point $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ sous la forme $(x,y,z) = \phi(r,\theta,z)$.

Théorème 6.4 (passage en coordonnées cylindriques)**.** *Soit $D \subset \mathbb{R}^+ \times [-\pi,\pi] \times \mathbb{R}$ un domaine (fermé borné). Soit $D' = \phi(D) \subset \mathbb{R}^3$ le domaine correspondant (dans les variables (x,y,z)). Pour toute fonction continue $f : D' \to \mathbb{R}$ on a :*

$$\int_{D'} f(x,y,z)dxdydz = \int_D f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)rdrd\theta dz$$

1) Justification : un parallélépipède $R = [r_1,r_2] \times [\theta_1,\theta_2] \times [z_1,z_2]$ de $\mathbb{R}^+ \times [-\pi,+\pi] \times \mathbb{R}$ est transformé par $\phi : (r,\theta,z) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ en un prisme droit S de base un secteur d'aire $(\theta_2-\theta_1) \times \frac{r_2^2-r_1^2}{2}$, et de hauteur $z_2 - z_1$, donc (par Fubini en piles !) de volume

$$(\theta_2-\theta_1) \times \frac{r_2^2-r_1^2}{2}(z_2-z_1)$$

Le quotient $\frac{\text{Volume}(S)}{\text{Volume}(R)}$ vaut $\frac{r_1+r_2}{2}$ et tend donc vers r lorsque $r_2 \to r, r_1 \to r$.

2) Calcul d'un volume.

Pour $R \ge 0$ et $t \ge 0$ on considère le solide $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, t^2(x^2+y^2) \le z^2, x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$. Calculer son volume.

D'abord représenter S !!!

Alors on voit que S est l'intersection d'un cône avec une sphère, donc S est en tranche verticales au dessus d'un certain disque (de centre 0 et de rayon $\frac{R}{\sqrt{1+t^2}}$ - i.e. en posant $t = \tan\varphi$ c'est $R_0 = R\cos\varphi$) : les coordonnées cylindriques sont adaptées.

Ainsi

$$\text{Volume}(S) = \int_S 1dxdydz = \int_D dxdy(\int_{z=t\sqrt{x^2+y^2}}^{z=\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}} 1dz)$$

$$= \int_D (\sqrt{R^2-(x^2+y^2)} - t\sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int_{r\in[0,R_0],\theta\in[-\pi,\pi]} (\sqrt{R^2-r^2} - tr)rdrd\theta$$

en passant en polaires. D'où :

$$\text{Volume}(S) = 2\pi(\frac{1}{3}[(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}]_{R_0}^0 - t[\frac{r^3}{3}]_0^{R_0}) = \frac{2\pi}{3}R^3(1-\sin\varphi)$$

6.4. **Calculs en coordonnées sphériques dans l'espace.**

Passer en coordonnées *sphériques*, c'est écrire $x = r\cos\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\cos\varphi$ et $z = r\sin\varphi$, où r, θ, φ varient dans un domaine R (à préciser) lorsque (x, y, z) décrivent un domaine donné S. Lors de ce passage les fonctions $f(x, y, z)$ sur S se transforment en fonctions $g(r, \theta, \varphi) = f(r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi)$ sur R.

Ce qui compte c'est comment ϕ transforme le volume d'un parallélépipède infinitésimal $[r, r + dr] \times [\theta, \theta + d\theta] \times [\varphi, \varphi + d\varphi]$.

Pour cela on calcule le volume (noté $V(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2, \varphi_1, \varphi_2)$) de l'image d'un parallélépipède normal $[r_1, r_2] \times [\theta_1, \theta_2] \times [\varphi_1, \varphi_2]$. Par découpage on a :

$V(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2, \varphi_1, \varphi_2) = V(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2, \varphi_1, 0) - V(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2, \varphi_2, 0) = V(r_1, 0, \theta_1, \theta_2, \varphi_1, 0) - V(r_2, 0, \theta_1, \theta_2, \varphi_1, 0) - V(r_1, 0, \theta_1, \theta_2, \varphi_2, 0) + V(r_2, 0, \theta_1, \theta_2, \varphi_2, 0)$.

On est ramené à calculer $V(R, 0, \theta_1, \theta_2, \varphi, 0)$ qu'on note $V(R, \theta_1, \theta_2, \varphi)$. L'invariance du volume par rotation assure que $V(R, \theta_1, \theta_2, \varphi)$ est proportionnel à $\theta_2 - \theta_1$, donc il suffit de considérer le cas $\theta_2 = +\pi, \theta_1 = -\pi$ (on note alors $V(R, \varphi)$ le volume). Mais alors le solide considéré est le complémentaire dans la demi-boule de la toupie conique/sphérique dont on a déjà calculé le volume. On trouve :

$V(R, \varphi) = \frac{2\pi}{3}R^3 - [\frac{2\pi}{3}R^3(1 - \sin\varphi)] = \frac{2\pi}{3}R^3\sin\varphi$ et donc

$$V(R, \theta_1, \theta_2, \varphi) = \frac{\theta_2 - \theta_1}{3}R^3\sin\varphi$$

Par les dcoupages vus prcdemment on obtient donc :

$$V(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2, \varphi_1, \varphi_2) = \frac{r_2^3 - r_1^3}{3}(\theta_2 - \theta_1)(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)$$

Alors

$$\frac{V(r, r + dr, \theta, \theta + d\theta, \varphi, \varphi + d\varphi)}{drd\theta d\varphi} = \frac{(r + dr)^3 - r^3}{3dr)}\frac{\sin(\varphi + d\varphi) - \sin\varphi}{d\varphi} \rightarrow_{dr\to 0, d\theta\to 0, d\varphi\to 0} r^2\cos\varphi$$

Nous obtenons donc :

Théorème 6.5 (passage en coordonnées sphriques)**.** *On pose $\phi(r, \theta, \varphi) = (x, y, z)$ avec $x = r\cos\varphi\cos\theta$, $y = r\cos\varphi\sin\theta$, $z = r\sin\varphi$.*

Soit $\Delta \subset \mathbb{R}^+ \times [-\pi, \pi] \times \times[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ un domaine (fermé borné). Soit $D = \phi(\Delta) \subset \mathbb{R}^3$ le domaine correspondant (dans les variables (x, y, z)). Pour toute fonction continue $f : D \to \mathbb{R}$ on a :

$$\int_D f(x, y, z)dxdydz = \int_\Delta g(r, \theta, \varphi)\, r^2\cos\varphi\, drd\theta d\varphi$$

(avec $g(r, \theta, \varphi) = f(r\cos\varphi\cos\theta, r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi)$)