Cours de mathématiques.

1. Intégrales multiples.

Commençons par quelques rappels sur l''intégrale d'une fonction numérique réelle - qui nous serviront même en dimension plus grande.

1.1. Rappels en dimension 1 et définitions préliminaires.

1.1.1. *L'intégrale comme limite de sommes de Riemann.* L'intégrale d'une fonction numérique réelle est définie *pour toute fonction continue* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, notée $\int_a^b f(x)dx$.

Intuitivement il s'agit de l'aire sous la courbe, mais voici comment on procède rigoureusement : pour $n \geq 1$ un entier fixé on subdivise l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles consécutifs

$$[a, b] = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup [a_n, b_n]$$

avec $a_i = a + (i-1)\frac{b-a}{n}$ et $b_i = a + i\frac{b-a}{n}$. Ensuite on considère la somme (dite de Riemann) :

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{i=n} f(a_i)\frac{b-a}{n}$$

Cette somme représente précisément l'aire d'une réunion de rectangles de base $b_i - a_i (= \frac{b-a}{n})$, de hauteur $f(a_i)$.

La fonction f est continue sur chaque intervalle $[a_i, b_i]$, donc elle y admet un maximum $M_{n,i}(f)(= f(\alpha_{n,i}))$ pour un certain $\alpha_{n,i} \in [a_i, b_i]$), et un minimum $m_{n,i}(f)(= f(\beta_{n,i}))$ pour un certain $\beta_{n,i} \in [a_i, b_i]$). On peut alors considérer deux autres sommes de Riemann :

$$\overline{S}_n(f) = \sum_{i=1}^{i=n} f(\alpha_{n,i})\frac{b-a}{n} \text{ et } \underline{S}_n(f) = \sum_{i=1}^{i=n} f(\beta_{n,i})\frac{b-a}{n}$$

On a clairement l'encadrement :

$$\underline{S}_n(f) \leq S_n(f) \leq \overline{S}_n(f)$$

La somme $\underline{S}_n(f)$ représente l'aire d'une union de rectangles au dessous de la courbe représentative de f (et la somme $\overline{S}_n(f)$ représente l'aire d'une union de rectangles au dessus de la courbe représentative de f).

Théorème 1.1. *Les trois sommes de Riemann $\underline{S}_n(f), S_n(f), \overline{S}_n(f)$ convergent quand n tend vers l'infini. Elles ont même limite, par définition cette limite est* l'intégrale de f sur $[a, b]$, *notée* $\int_a^b f(x)dx$.

esquisse de démonstration. Par l'encadrement il suffit de montrer que $\underline{S}_n(f)$ et $\overline{S}_n(f)$ ont même limite.

On remarque que $\overline{S}_n(f) - \underline{S}_n(f) = \sum_{i=1}^{i=n}(M_{n,i}(f) - m_{n,i}(f))\frac{b-a}{n}$.

Comme f est continue sur $[a, b]$ elle y est uniformément continue. Donc pour ε fixé quelconque il existe $\alpha > 0$ tel que si $|x - y| < \alpha$ alors $|f(x) - f(y)| < \alpha$.

Poussons n assez loin pour que le pas de subdivision $\frac{b-a}{n}$ devienne $< \alpha$. Nous aurons alors pour tout i la majoration suivante de l'écart maximal des valeurs de f sur $[a_i, b_i]$:

$$M_{n,i}(f) - m_{n,i}(f) < \varepsilon$$

Ainsi

$$\overline{S}_n(f) - \underline{S}_n(f) < \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon \frac{b-a}{n} = \varepsilon(b-a)$$

Nous venons en fait de montrer que $\lim_{n\to+\infty} \overline{S}_n(f) - \underline{S}_n(f) = 0$. Il reste à montrer que les deux suites convergent (ou une seule, puisque leur distance tend vers 0).

On constate alors que si $m \geq 1$ divise $n \geq 1$ alors on a

$$\underline{S}_n(f) \leq \underline{S}_m(f) \leq \overline{S}_m(f) \leq \overline{S}_n(f)$$

Donc par exemple la suite $\underline{S}_{2^n}(f)$ est croissante, la suite $\overline{S}_{2^n}(f)$ est décroissante et on a montré ci-dessus que $\overline{S}_{2^n}(f) - \underline{S}_{2^n}(f) \to 0$: par le théorème des suites adjacentes il en résulte que ces deux suites ont même limite.

(Cette façon d'intégrer par subdivisions successives en deux intervalles égaux - “dichotomie” - se programme bien.)

Pour conclure la preuve on montre que la suite $\underline{S}_n(f)$ est de Cauchy. Pour $n, k \geq N$ (on prendra N très grand ensuite), posons $m = kn$. Alors $\underline{S}_n(f) \leq \underline{S}_m(f) \leq \overline{S}_n(f)$, donc

$$|\underline{S}_n(f) - \underline{S}_m(f)| \leq |\underline{S}_n(f) - \overline{S}_n(f)|$$

et de même

$$|\underline{S}_k(f) - \underline{S}_m(f)| \leq |\underline{S}_k(f) - \overline{S}_k(f)|$$

Or nous avons montré que la suite $(|\underline{S}_p(f) - \overline{S}_p(f)|)$ tend vers 0, donc si N est assez grand $|\underline{S}_n(f) - \underline{S}_m(f)|$ et $|\underline{S}_k(f) - \underline{S}_m(f)|$ sont très petits, de sorte que finalement $|\underline{S}_n(f) - \underline{S}_m(f)|$ est très petit.

Le théorème de Cauchy sur les suites assure alors que $(\underline{S}_n(f))_{n\geq 1}$ est convergente.

$\square$

Une conséquence immédiate de la définition est l'encadrement suivant, où l'on a posé $m(f, [a,b]) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M(f,[a,b]) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$:

$$m(f,[a,b])(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(f,[a,b])(b-a)$$

On obtient une approximation (en générale grossière) de $\int_a^b f(x)dx$ par la quantité $f(c) \times (b-a)$, pour $c \in [a,b]$ quelconque. L'erreur commise est :

$$|\int_a^b f(x)dx - f(c)(b-a)| \leq \max\big(M(f,[a,b]) - f(c), f(c) - m(f,[a,b])\big) \times (b-a)$$

donc

$$|\int_a^b f(x)dx - f(c)(b-a)| \leq \big(M(f,[a,b]) - m(f,[a,b])\big) \times (b-a)$$

Enfin lorsque c varie dans $[a,b]$, la quantité $\int_a^b f(x)dx - f(c)(b-a)$ est ≥ 0 en tout point c tel que $f(c) = m(f,[a,b])$, et elle est ≤ 0 en tout point c tel que $f(c) = M(f,[a,b])$. Donc par la continuité de f et le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un point $c \in [a,b]$ tel que $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Remarque 1.2.

1) Si au lieu de prendre le point a_i pour évaluer f dans la somme de Riemann on prend un point quelconque c_i de l'intervalle $[a_i, b_i]$, la somme de Riemann correspondante reste comprise entre $\underline{S}_n(f)$ et $\overline{S}_n(f)$. Donc cette suite de sommes converge également.

2) Si on prend une subdivision de $[a,b] = [a_1,b_1] \cup [a_2,b_2] \cup [a_n,b_n]$ en intervalles non nécessairement de même longueur (mais toujours d'intérieurs disjoints), et si on choisit dedans un point $c_i \in [a_i,b_i]$ pour évaluer f, on peut considérer la somme de Riemann associée :

$$S(f,(a_i),(b_i),(c_i)) = \sum_{i=1}^{i=n} f(c_i) \times (b_i - a_i)$$

On montre facilement que quand on prend une suite de subdivisions dont le pas (par définition $= \max_i(b_i - a_i)$) tend vers 0 alors la suite de sommes de Riemann converge encore vers $\int_a^b f(x)dx$.

3) Enfin si on considère une union d'intervalles $[a_1,b_1] \cup [a_2,b_2] \cup [a_n,b_n] \subset [a,b]$ dont les intérieurs sont deux à deux disjoints, et si on choisit dedans un point $c_i \in [a_i,b_i]$ pour évaluer f, alors la somme de Riemann associée :

$$S(f,(a_i),(b_i),(c_i)) = \sum_{i=1}^{i=n} f(c_i) \times (b_i - a_i)$$

converge encore vers $\int_a^b f(x)dx$ si $= \max_i(b_i - a_i)$ tend vers 0 et de plus la longueur totale du multi-intervalle $(= (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \cdots + (b_n - a_n))$ tend vers $b - a$.

Cela découle du point 2) en complétant $[a_1,b_1] \cup [a_2,b_2] \cup [a_n,b_n] \subset [a,b]$ en une vraie subdivision de $[a,b]$: on rajoute les quelques intervalles manquant (il y en a au plus $n+1$, et la longueur totale des intervalles manquant tend vers 0), en choisissant dedans arbitrairement un point pour évaluer f

Pour les calculs explicites:

(1) d'une part on ne se sert (presque) pas de la définition (par limite de sommes de Riemann) mais plutôt des propriétés vues en cours ;
(2) d'autre part on travaille avec les fonctions usuelles (restreintes à un intervalle $[a,b]$).

On procèdera de même pour intégrer les fonctions continues sur un domaine du plan ou de l'espace.

1.1.2. *Rappel sur la dimension 1.*

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est *continue (sur I)* si pour tout t dans l'intervalle I et toute suite $(t_n)_{n\geq 0}$ de réels de I tendant vers t on a $\lim f(t_n) = f(t)$. Parmi les fonctions continues une classe essentielle est constituée des fonctions usuelles.

Définition 1.3 (fonctions usuelles sur un intervalle de $\mathbb{R}$)**.** Une fonction numérique usuelle de base d'une variable réelle, c'est $f : I \to \mathbb{R}$, avec $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle (de longueur > 0 [ou même une union finie d'intervalles]), et $f(x)$ polynomiale, exponentielle, sinusoïdale. Ensuite les fonctions usuelles s'obtiennent à partir des fonctions de base par les opérations habituelles : somme, produit, quotient (là où le dénominateur ne prend pas la valeur 0), composée, inverse (quand et où bijectif).

Exemple 1.4. Fractions rationnelles, logarithme, puissances, polynôme trigonométrique.

La dérivée d'une fonction usuelle est une fonction usuelle. Mais l'intégration - l'opération inverse de la dérivation - pose plus de problèmes : il est souvent difficile de calculer $\int_a^b f(x)dx$, même pour f usuelle assez simple.

Rappelons le :

Théorème 1.5 (théorème fondamental de l'analyse)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a,b]$, de dérivée $F'(x) = f(x)$. Si $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une quelconque autre fonction dérivable telle que $G'(x) = f(x)$, alors $F - G$ est constante. Et*

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$$

Certaines fonctions usuelles (comme les polynômes) sont des dérivées de fonctions usuelles, d'autres non !

Problème 1.6. Calculer $\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{+A} \exp(-x^2)dx$...

Proposition 1.7 (règles de calcul pour $\int_a^b f(x)dx$)**.**

1.1.3. *Les fonctions usuelles de plusieurs variables et leurs domaines.*

Un point du plan géométrique est déterminé par deux coordonnées cartésiennes : pour cette raison nous appellerons l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples (x,y) un (voire "le") *plan*, et ses éléments seront appelés des points. De même nous appellerons l'ensemble $\mathbb{R}^3$ de tous les triplets (x,y,z) l'*espace*, et ses éléments seront appelés des points.

Définition 1.8 (polynômes en 2 ou 3 variables)**.** Un *polynôme sur* $\mathbb{R}^2$ est une fonction $P : (x,y) \mapsto \sum_{i+j\leq d} a_{ij}x^iy^j$ (somme finie de *monômes*). De même un *polynôme sur* $\mathbb{R}^3$ est une fonction $P : (x,y,z) \mapsto \sum_{i+j+k\leq d} a_{ijk}x^iy^jz^k$.

Bref les polynômes s'obtiennent en faisant des sommes et des produits de fonctions très simples : les constantes d'une part, les coordonnées x, y (ou x, y, z) d'autre part.

Exemple 1.9. $(x,y) \mapsto 1; (x,y) \mapsto x + 2y; (x,y) \mapsto 2x^2 - 3xy + y - 5; (x,y) \mapsto x^3y^3 - x - y$
$(x,y,z) \mapsto 1; (x,y,z) \mapsto x + 2y - 3z; (x,y) \mapsto -x^2 + 2yz + xz^3 + 4; (x,y,z) \mapsto x^9y^8z^7 + x^7y^9z^8 + x^8y^7z^9 - 3$

Remarque 1.10. Certains polynômes sur $\mathbb{R}^2$ (ou sur $\mathbb{R}^3$) ne dépendent en fait que d'une seule variable. Par exemple $P(x,y) = 2x - x^3$ - qu'il ne faut pas confondre avec $p(x) = 2x - x^3$ (fonction d'une seule variable) - ni avec $Q(x,y) = 2y - y^3$ (qui vaut $P(y,x)$).

D'autre part quand on fixe une variable dans un polynôme P de n variables, on obtient un polynôme des $n-1$ autres variables. Par exemple pour $P(x,y,z) = xy^2z^3 - x^2y + 4$ fixons $z = -1$, nous obtenons la fonction $(x,y) \mapsto 4 - x^2y - xy^2$, polynôme en deux variables.

Par exemple si $P = P(x,y)$ est un polynôme de deux variables, quand on fixe $y = y_0$, on obtient un polynôme d'une seule variable $x \mapsto P(x,y_0)$. Ce polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$, on notera $\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)$ sa dérivée en $x = x_0$. Cette fonction de (x_0,y_0) s'appelle *la dérivée partielle de P par rapport à x au point* (x_0,y_0), c'est encore un polynôme.

Par exemple pour $P(x,y) = 3x^3y - 2xy^2 + y^4 - 1$ et y_0 quelconque fixé, on obtient $P(x,y_0) = 3x^3y_0 - 2xy_0^2 + y_0^4 - 1$, fonction dérivable de x dont la dérivée par rapport à x est : $9x^2y_0 - 2y_0^2$, de sorte que $\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 9x^2y - 2y^2$.

On définit de même la dérivée partielle par rapport à y : on fixe $x = x_0$ et on obtient ainsi un polynôme en y, que l'on dérive par rapport à y. Le résultat est noté $\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)$, appelé *la dérivée partielle de P par rapport à y au point* (x_0,y_0).

Définition 1.11 (domaines du plan ou de l'espace)**.**

Un *domaine élémentaire du plan* est une partie D du plan $\mathbb{R}^2$ définie par une seule inégalité (large ou stricte) : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, c(x,y) \geq 0\}$ (ou $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, c(x,y) > 0\}$).

Un *domaine de base du plan* est une partie D du plan $\mathbb{R}^2$ définie par un nombre **fini** d'inégalités larges ou strictes : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, c_1(x,y) \geq 0, c_2(x,y) \geq 0, \ldots, c_i(x,y) \geq 0, c_{i+1}(x,y) > 0, \ldots, c_k(x,y) > 0\}$.

Un *domaine du plan* est une union **finie** de domaines de base.

De même un *domaine de l'espace* est une union finie de *domaines de base de l'espace*, autrement dit des parties $D \subset \mathbb{R}^3$ définies par une famille finie d'inégalités larges ou strictes : $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, s_1(x,y,z) \geq 0, s_2(x,y,z) \geq 0, \ldots, s_j(x,y,z) \geq 0, s_{j+1}(x,y,z) > 0, \ldots, s_\ell(x,y,z) > 0\}$ (les domaines *élémentaires* de l'espace correspondent à une seule inégalité).

Pour nous les fonctions $(x,y) \mapsto c(x,y)$ (ou $(x,y,z) \mapsto s(x,y,z)$) seront des fonctions usuelles de base (voir plus bas la Définition 1.14), presque toujours des polynômes.

Tous les domaines de base de $\mathbb{R}^2$ considérés seront *réguliers*, au sens où on interdit qu'il y ait un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $c_i(x_0,y_0) = 0$ et simultanément $\frac{\partial c_i}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial c_i}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$. Par le cours de calcul différentiel, cette condition assure que l'ensemble des $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $c_i(x,y) = 0$ est bien une courbe (pour abréger cette courbe est notée par son équation $c(x,y) = 0$).

On dira alors que le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, c_1(x,y) \geq 0, c_2(x,y) \geq 0, \ldots, c_i(x,y) \geq 0, c_{i+1}(x,y) > 0, \ldots, c_k(x,y) > 0\}$ est délimité par les courbes $c_1(x,y) = 0, c_2(x,y) = 0, \ldots, c_k(x,y) = 0$.

De même on supposera tous les domaines de base de $\mathbb{R}^3$ réguliers: si $\frac{\partial s_j}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) = \frac{\partial s_j}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) = \frac{\partial s_j}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) = 0$ alors $s_j(x_0,y_0,z_0) \neq 0$. Dans ce cas $s_j = 0$ est une bien une surface de $\mathbb{R}^3$, et les surfaces $s_1 = 0, \ldots, s_\ell = 0$ délimitent le domaine.

Un domaine est *fermé* s'il est une union finie de domaine de base définis par des inégalités larges uniquement.

Un domaine est *borné* s'il est contenu dans un disque ou une boule.

Noter que $c(x,y) = x^2+y^2$ est bien un polynôme mais $c(x,y) = 0$ n'est pas une courbe. D'ailleurs $\frac{\partial c}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial c}{\partial y}(0,0) = 0$.

Exemple 1.12 (quelques domaines)**.**

(1) Carrés, cubes.
(2) Disque, boules.

Remarque 1.13. Par définition, tout domaine peut s'obtenir à partir d'unions finie d'intersections finies de domaines de la forme $c(x,y) \geq 0$ ou $c(x,y) > 0$. Le sens des inégalités importe peu: il suffit de changer c en $-c$.

La classe des domaines considérés est stable par certaines opérations sur les ensembles:

(1) une *union* finie de domaine est un domaine
(2) une *intersection* finie de domaine est un domaine
(3) le *complémentaire* d'un domaine est un domaine

Définition 1.14. Une fonction numérique usuelle de base de deux variables réelles, c'est $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui associe au point (x,y) la quantité $\phi(P(x,y))$ avec P polynomiale sur $\mathbb{R}^2$ et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polynomiale, exponentielle ou sinusoïdale.

De même une fonction numérique usuelle de base de trois variables réelles, c'est $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ qui associe au point (x,y,z) la quantité $\phi(P(x,y,z))$ avec P polynomiale sur $\mathbb{R}^3$ et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polynomiale, exponentielle ou sinusoïdale.

Ensuite les fonctions usuelles s'obtiennent à partir des fonctions de base par les opérations habituelles : somme, produit, quotient (là où le dénominateur ne prend pas la valeur 0), composée, inverse (quand bijectif).

Enfin les fonctions usuelles seront restreintes à des domaines quelconques contenu dans le domaine de définition, ce qui introduit une variété infinie pour une même formule de f en fonction des coordonnées (par définition la même *formule* $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ sur le domaine $x \geq 1$ ou sur $y \leq 2$ donne deux *fonctions* distinctes - fonction = formule + domaine).

Mise en garde 1.15. Autant les domaines de définition des fonctions d'une variable sont très simples, autant les domaines du plan (ou de l'espace) peuvent avoir des formes très compliquées. Pour parvenir à étudier - par exemple intégrer - une fonction de plusieurs variables, il faudra d'abord *visualiser* le domaine où elle est définie, et si possible le *dessiner* (schématiquement).

Définition 1.16. Une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est *continue (sur D)* si pour tout point $p = (x, y)$ dans le domaine D et toute suite $(p_n)_{n\geq 0} = (x_n, y_n)_{n\geq 0}$ de points de D tendant vers p (c'est à dire $\lim x_n = x$ et $\lim y_n = y$), on a $\lim f(p_n) = f(p)$.

De même une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est *continue (sur D)* si pour tout point $p = (x, y, z)$ dans le domaine D et toute suite $(p_n)_{n\geq 0} = (x_n, y_n, z_n)_{n\geq 0}$ de points de D tendant vers p (c'est à dire $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$ et $\lim z_n = z$), on a $\lim f(p_n) = f(p)$.

1.2. **Définition de l'intégrale.**

1.2.1. *Intégrale d'une fonction* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Soit D un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction numérique continue. On approxime d'abord D par une union finie de carrés internes.

Plus précisément : Soit $n \geq 0$ un entier (pensé assez grand). Soit E_n $(= E_n(D))$ l'ensemble des points dont les coordonnées sont de la forme $(r, s) = (\frac{k}{2^n}, \frac{\ell}{2^n})$ où $(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$, et de plus le carré fermé $C(r, s, n)$ de sommet $(r, s), (r + \frac{1}{2^n}, s), (r + \frac{1}{2^n}, s + \frac{1}{2^n}), (r, s + \frac{1}{n})$ (“ de côté $\frac{1}{2^n}$ et d'aire $(\frac{1}{2^n})^2$ ”) est contenu dans D. La somme de Riemann est la somme

$$S(f, n) = \sum_{(r,s)\in E_n} f(r, s).\frac{1}{2^{2n}}$$

Noter que cette somme peut être nulle : si le domaine est de taille petite par rapport à $\frac{1}{2^n}$ alors aucun carré de côté $\frac{1}{2^n}$ n'est contenu dans D, donc $E_n = \emptyset$. En revanche comme D est borné l'ensemble E_n est toujours fini, donc la somme de Riemann $S(f, n)$ est finie.

Nous admettrons le résultat suivant, dont la preuve est similaire à celle du théorème de convergence des sommes de Riemann des fonctions numériques $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Théorème 1.17 (convergence des sommes de Riemann vers l'intégrale double)**.**

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur D régulier borné. Supposons que f est définie et continue sur un domaine $\overline{D}$ qui contient D et qui de plus est régulier, borné et **fermé**. *Alors quand $n \to +\infty$, les sommes de Riemann $S(f, n)$ ont une limite finie, qui sera notée $\int_D f(x, y)dxdy$ (parfois $\iint_D f(x, y)dxdy$ en physique).*

Si à chaque pas n dans les sommes $S(f, n)$ on remplace $f(r, s)$ par $f(r', s')$, où (r', s') est un point arbitraire dans le carré $C(r, s, n)$, alors les sommes de Riemann correspondantes convergent aussi et elles ont la même limite.

Remarque 1.18.

(1) Une condition suffisante de convergence des sommes de Riemann est donc que le domaine d'intégration D de la fonction continue soit borné, régulier et **fermé**.
(2) Même si la définition est donnée pour f continue quelconque, les calculs explicites ne pourront être faits que pour f usuelle, qui plus est sur des domaines D très simples.

Mise en garde 1.19. La condition “ f définie continue sur un domaine fermé contenant D ” est essentielle dans le théorème ci-dessus ! Penser à $(x,y) \mapsto \frac{1}{x}$ sur le carré $D =]0,1] \times [0,1]$.

1.2.2. *Intégrale d'une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.* Soit D un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction numérique continue. On approxime d'abord D par un domaine union de cubes.

Pour $n \geq 0$ un entier soit E_n $(= E_n(D))$ l'ensemble des points dont les composantes sont de la forme $(r,s,t) = (\frac{k}{2^n}, \frac{\ell}{2^n}, \frac{m}{2^n})$ où $(k,\ell,m) \in \mathbb{Z}^3$ et de plus le cube fermé $C(r,s,t,n)$ de coin $(r,s,t), (r+\frac{1}{2^n},s,t), (r,s+\frac{1}{2^n},t), (r,s,t+\frac{1}{2^n})$ (“ de volume $(\frac{1}{2^n})^3$ ”) est contenu dans D. La somme de Riemann associée est

$$S(f,n) = \sum_{(r,s,t)\in E_n} f(r,s,t).\frac{1}{2^{3n}}$$

Théorème 1.20 (convergence des sommes de Riemann vers l'intégrale triple)**.**

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur D régulier borné. Supposons que f est définie et continue sur un domaine $\overline{D}$ qui contient D et qui de plus est régulier, borné et **fermé**. *Alors quand $n \to +\infty$ les sommes de Riemann $S(f,n)$ ont une limite finie, notée $\int_D f(x,y,z)dxdydz$ (parfois $\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$ en physique).*

De plus si à chaque pas n dans les sommes $S(f,n)$ on remplace $f(r,s,t)$ par $f(r',s',t')$, où (r',s',t') est un point arbitraire dans le cube $C(r,s,t,n)$, alors les sommes ont la même limite.

Définition 1.21 (aires et volumes)**.** Soit D un domaine régulier borné de $\mathbb{R}^2$. Alors l'*aire de D* est par définition

$$\mathrm{Aire}(D) = \int_D 1\ dxdy$$

Soit D un domaine régulier borné de $\mathbb{R}^3$. Alors le *volume de D* est par définition

$$\mathrm{Volume}(D) = \int_D 1\ dxdydz$$

Remarque 1.22. La fonction constante 1 est continue sur tout le plan ou l'espace, et le domaine D borné est contenu dans un disque fermé ou une boule fermée.

Avec la définition de l'intégrale comme limite de sommes de Riemann, on voit qu'on définit l'aire de D comme la limite (croissante) de la suite des aires des sous-domaines D_n unions de carrés contenus dans D. La définition est donc raisonnable, puisqu'on peut montrer que l'aire résiduelle (celle de $D \setminus D_n$) tend vers 0 (voir la preuve de la convergence des sommes de Riemann). D'autre part la définition est compatible avec les formules pour les surfaces planes usuelles : polygone, disque, secteur ...

1.2.3. *Interprêtation géométrique des intégrales.*

On sait qu'intuitivement l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ d'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ positive représente “l'aire sous la courbe représentative de f”, autrement dit l'aire du domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$. Notre définition de l'aire d'un domaine donne un sens précis à cette identification.

De même si D est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, toute fonction (continue) $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ peut-être représenté géométriquement par la surface $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (x,y) \in D \text{ et } z = f(x,y)\}$. On a:

Théorème 1.23 (Interprêtation géométrique de l'intégrale)**.** *Si $f \geq 0$ soit S le solide sous la surface représentative de f, autrement dit $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (x,y) \in D \text{ et } 0 \leq z \leq f(x,y)\}$.*

Alors $\int_D f(x,y)dxdy = Volume(S)$.

1.3. **Premières propriétés.**

1.3.1. *Les courbes du plan et les surfaces de l'espace sont invisibles pour l'intégrale.*

L'aire d'une courbe régulière $c(x, y) = 0$ est nulle. Le volume d'une surface régulière $s(x, y, z) = 0$ est nul. Plus généralement l'intégrale double (ou triple) sur une courbe (ou une surface) est nulle.

Proposition 1.24. *Soit $C = \{c(x, y) = 0\}$ une courbe régulière du plan $\mathbb{R}^2$. Alors pour toute fonction continue $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie sur un domaine régulier borné fermé D, on a*

$$\int_{C\cap D} f(x, y)\ dxdy = 0$$

De même soit $S = \{s(x, y, z) = 0\}$ une surface régulière de l'espace $\mathbb{R}^3$. Alors pour toute fonction continue $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie sur un domaine régulier borné fermé D, on a

$$\int_{S\cap D} f(x, y, z)\ dxdydz = 0$$

1.3.2. *Propriétés algébriques de l'intégrale.*

Les propriétés suivantes sont vraies pour les sommes de Riemann - donc en passant à la limite elles sont vraies pour l'intégrale.

Proposition 1.25 (l'intégrale est linéaire)**.**

1) Si f, g sont continues sur D fermé borné régulier alors $\int_D (f + g) = \int_D f + \int_D g$.

2) Si $a \in \mathbb{R}$ et f, est continue sur D fermé borné régulier alors $\int_D af = a \int_D f$.

1.3.3. *Majorations, minorations.*

Proposition 1.26 (l'intégrale est croissante par rapport à la fonction)**.**

Si $f \geq g$ alors $\int_D f \geq \int_D g$.

Comme conséquences on obtient par exemple :

Corollaire 1.27.

(1) *Si $f \geq 0$ alors $\int_D f \geq 0$.*

(2) $|\int_D f| \leq \int_D |f|$.

(3)

$$\big(\min_{x\in D} f(x)\big)\ \big(aire(D)\big) \leq \int_D f(x)dx \ \leq \big(\max_{x\in D} f(x)\big)\ \big(aire(D)\big)$$

Clairement si $f = 0$ (la fonction nulle) $\int_D f = 0$. On peut se demander quand est-ce que l'implication réciproque est vraie: quand est-ce que $\int_D f = 0$ implique $f = 0$.

Proposition 1.28.

Soit D un domaine régulier borné fermé.

Si f est continue et positive sur D, alors $f = 0 \iff \int_D f = 0$.

Si f est continue de signe quelconque sur D, alors $f = 0 \iff \int_D |f| = 0$.

1.3.4. *Linéarité de l'intégrale.*

[linéarité de l'intégrale] $\int(f + g) = \int f + \int g$, $\int af = a \int f$

1.3.5. *Découpage des domaines.*

Théorème 1.29 (découpage élémentaire)**.** *Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine régulier borné contenu dans un domaine régulier borné fermé $\overline{D} \subset \mathbb{R}^2$, et soit $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient $\Delta_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, c(x,y) \geq 0\}$ et $\Delta_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, c(x,y) < 0\}$. Ainsi $D = D_1 \sqcup D_2$ avec $D_1 = D \cap \Delta_1$ et $D_1 = D \cap \Delta_1$. Alors*

$$\int_{D=D_1 \sqcup D_2} f(x,y)dxdy = \int_{D_1} f(x,y)dxdy + \int_{D_2} f(x,y)dxdy$$

Plus généralement :

Théorème 1.30 (découpage)**.** *Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine régulier borné contenu dans un domaine régulier borné fermé $\overline{D} \subset \mathbb{R}^2$, et soit $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient $\Delta_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, c_1(x,y) \geq 0, \ldots, c_k(x,y) \geq 0\}$ et $\Delta_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \Delta_1$ le complémentaire de Δ_1, i.e. $\Delta_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, c_1(x,y) < 0, \text{ ou } c_2(x,y) < 0, \ldots, \text{ ou } c_k(x,y) < 0\}$. Ainsi $D = D_1 \sqcup D_2$ avec $D_1 = D \cap \Delta_1$ et $D_1 = D \cap \Delta_1$. Alors*

$$\int_{D=D_1 \sqcup D_2} f(x,y)dxdy = \int_{D_1} f(x,y)dxdy + \int_{D_2} f(x,y)dxdy$$

En fait si on pose $\Delta_2' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, c_1(x,y) \leq 0, \text{ ou } c_2(x,y) \leq 0, \ldots, \text{ ou } c_k(x,y) \leq 0\}$ puis $D_2' = D \cap \Delta_2'$ on peut découper selon le Théorème 1.30 pour obtenir

$$\int_{D_2'} f(x,y)dxdy = \int_{D_2} f(x,y)dxdy + \int_{D \cap c(x,y)=0} f(x,y)dxdy = \int_{D_2} f(x,y)dxdy$$

Autrement dit on ne change pas une intégrale en enlevant ou en rajoutant les courbes au bord.

Et on a donc tout aussi bien :

Corollaire 1.31.

$$\int_{D=D_1 \cup D_2'} f(x,y)dxdy = \int_{D_1} f(x,y)dxdy + \int_{D_2'} f(x,y)dxdy$$

On a le même type de propriétés dans l'espace, avec les mêmes arguments :

Théorème 1.32. *Soit $D \subset \mathbb{R}^3$ un domaine régulier borné contenu dans un domaine régulier borné fermé $\overline{D} \subset \mathbb{R}^3$, et soit $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient $\Delta_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, s_1(x,y,z) \geq 0, \ldots, s_\ell(x,y,z) \geq 0\}$ et $\Delta_2 = \mathbb{R}^3 \setminus \Delta_1$ le complémentaire de Δ_1, i.e. $\Delta_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, s_1(x,y,z) < 0, \text{ ou } s_2(x,y,z) < 0, \ldots, \text{ ou } s_\ell(x,y,z) < 0\}$. Alors*

$$\begin{aligned}\int_{D=D_1 \sqcup D_2} f(x,y,z)dxdydz &= \int_{D_1} f(x,y,z)dxdydz + \int_{D_2} f(x,y,z)dxdydz \\ &= \int_{D_1} f(x,y,z)dxdydz + \int_{D_2'} f(x,y,z)dxdydz\end{aligned}$$

Noter que les relations de découpage des intégrales obtenues dans le plan ou l'espace généralisent la relation de Chasles pour les intégrales $\int_a^b f(x)dx$.

Corollaire 1.33 (calcul d'aires et de volumes par découpages)**.**

1.4. **Le théorème de Fubini.**

C'est l'outil essentiel pour le calcul explicite des intégrales multiples, car il ramène le calcul des intégrales doubles au calcul des intégrales simples, et celui des intégrales triples à celui des intégrales doubles.

1.4.1. *Fubini dans le plan.*

Un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ est dit *en piles* (ou en *tranches horizontales*) est un domaine de la forme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, \psi(x) \leq y \leq \phi(x)\}$, où $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues usuelles telles que $\psi(x) \leq \phi(x)$ pour $x \in [a,b]$.

Théorème 1.34 (Fubini en piles)**.** *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un domaine régulier, fermé, borné. Supposons que D est* en piles *(ou en* tranches verticales*) , c'est à dire que D est de la forme*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, \psi(x) \leq y \leq \phi(x)\}$$

où $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues usuelles telles que $\psi(x) \leq \phi(x)$ pour $x \in [a,b]$.

Alors l'intégrale partielle $\int_{\psi(x_0)}^{\phi(x_0)} f(x_0,y)dy$ est bien définie pour tout $x_0 \in [a,b]$ fixé. De plus la fonction $x \mapsto \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} f(x,y)dy$ est continue sur $[a,b]$ et on a

$$\int_a^b \Big(\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} f(x,y)dy\Big)dx = \int_D f(x,y)dxdy$$

Théorème 1.35 (Fubini en tranches)**.** *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un domaine régulier, fermé, borné. Supposons que D D est* en tranches (horizontales) *, c'est à dire que D est de la forme*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, a \leq y \leq b, \psi(y) \leq x \leq \phi(y)\}$$

où $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues usuelles telles que $\psi(y) \leq \phi(y)$ pour $y \in [a,b]$.

Alors l'intégrale partielle $\int_{\psi(y_0)}^{\phi(y_0)} f(x,y_0)dx$ est bien définie pour tout $y_0 \in [a,b]$ fixé. De plus la fonction $y \mapsto \int_{\psi(y)}^{\phi(y)} f(x,y)dx$ est continue sur $[a,b]$ et on a

$$\int_a^b \Big(\int_{\psi(y)}^{\phi(y)} f(x,y)dx\Big)dy = \int_D f(x,y)dxdy$$

En général on utilisera Fubini en piles et / ou Fubini en tranches après avoir découpé convenablement le domaine d'intégration.

Remarque: Fubini (en piles) appliqué au calcul de l'aire de l'hypographe d'une fonction redonne l'intégrale unidimensionnelle.

Comme conséquence de Fubini, voici un premier résultat (simple) de changement de variables.

Corollaire 1.36 (effet d'une dilatation des coordonnées)**.** *Soient λ, μ deux réels $\neq 0$. On considère la fonction $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui transforme (x,y) en $(\lambda x, \mu y)$.*

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine du plan, $D' = \phi(D)$ son image par ϕ, et $f : D' \to \mathbb{R}$.

Alors

$$\int_{D'} f(x',y')dx'dy' = \int_D f(\lambda x, \mu y)|\lambda||\mu|dxdy$$

Par exemple si D est un rectangle de la forme $[a,b] \times [c,d]$ (donc x varie de a à b et y varie de c à d), alors D' est le rectangle $[|\lambda|a, |\lambda|b] \times [|\mu|c, |\mu|d]$. Et si f est la fonction constante 1, la relation prédite par l'énoncé est simplement que l'aire de l'image D' n'est pas égale à l'aire de D, mais à l'aire de D multipliée par $|\lambda||\mu|$ - ce qui est évident.

Ainsi une homothétie de rapport k multiplie les aires par k^2.

1.4.2. *Fubini dans l'espace.*

Théorème 1.37 (Fubini sur un cyclindre)**.** *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un domaine régulier, fermé, borné. Supposons que D est* en piles *(ou en* tranches verticales*) , c'est à dire que D est de la forme*

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in \Delta, \psi(x, y) \le z \le \phi(x, y)\}$$

où Δ est un domaine régulier, borné, fermé et $\phi : \Delta \to \mathbb{R}$ et $\psi : \Delta \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues usuelles telles que $\psi(x, y) \le \phi(x, y)$ pour $(x, y) \in \Delta$.

Alors l'intégrale partielle $\int_{\psi(x_0,y_0)}^{\phi(x_0,y_0)} f(x_0, y_0, z)dz$ est bien définie pour tout $(x_0, y_0) \in \Delta$ fixé. De plus la fonction $(x, y) \mapsto \int_{\psi(x,y)}^{\phi(x,y)} f(x, y, z)dz$ est continue sur Δ et on a

$$\int_\Delta \Big(\int_{\psi(x,y)}^{\phi(x,y)} f(x, y, z)dz\Big)dxdy = \int_D f(x, y, z)dxdydz$$

On peut bien sûr appliquer Fubini sur un cylindre d'axe de direction (Ox) ou (Oy) (donc D est de la forme $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (y, z) \in \Delta, \psi(y, z) \le x \le \phi(y, z)\}$ ou D est de la forme $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, z) \in \Delta, \psi(x, z) \le y \le \phi(x, z)\}$).

Théorème 1.38 (Fubini sur un cône)**.** *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un domaine régulier, fermé, borné. Supposons que D est* un cone*, c'est à dire que D est de la forme*

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in h_{\omega, \frac{z-a}{b-a}}(\Delta), a \le z \le b\}$$

où Δ est un domaine régulier, borné, fermé, $h_{\omega, \frac{z-a}{b-a}}$ désigne l'homothétie de centre $\omega \in \mathbb{R}^2$ et de rapport k, et $a < b$ sont des réels. Pour $z \in [a, b]$ on notera Δ_z le domaine $h_{\omega, \frac{z-a}{b-a}}(\Delta)$, de sorte que $\Delta_a = \Delta$ et $\Delta_b = \{\omega\}$. La condition $(x, y) \in \Delta_z$ équivaut explicitement à demander qu'il existe $(p, q) \in \Delta$ tel que $(x, y) = \omega + \frac{z-a}{b-a}(p, q)$.

Alors l'intégrale partielle $\int_{(x,y)\in\Delta_{z_0}} f(x, y, z_0)dxdy$ est bien définie pour tout $z_0 \in [a, b]$ fixé. De plus la fonction $z \mapsto \int_{\Delta_z} f(x, y, z)dxdy$ est continue sur $[a, b]$ et on a

$$\int_a^b \Big(\int_{\Delta_z} f(x, y, z)dxdy\Big)dz = \int_D f(x, y, z)dxdydz$$

(Ici encore on peut changer l'axe du cône.)

1.4.3. *Applications.* Aire d'un parallélogramme, d'un disque, d'une ellipse, volume d'une boule, d'une pyramide... On retrouve les formules "classiques".

Si $R \subset \mathbb{R}^2$ est un rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$ et si $f : R \to \mathbb{R}$ est continue de la forme $f(x, y) = g(x)h(y)$ avec $g : [a, b] \to \mathbb{R}, h : [c, d] \to \mathbb{R}$ continues, on a

$$\int_R f(x, y)dxdy = \Big(\int_a^b (g(x)dx\Big)\Big(\int_c^d (h(y)dy\Big)$$

Si $D \subset \mathbb{R}^3$ est un prisme $D = \Delta \times [c, d]$ (avec $\Delta \subset \mathbb{R}^2$) et si $f : D \to \mathbb{R}$ est continue de la forme $f(x, y, z) = g(x, y)h(z)$ avec $g : \Delta \to \mathbb{R}, h : [c, d] \to \mathbb{R}$ continues, on a

$$\int_R f(x, y, z)dxdydz = \Big(\int_\Delta (g(x, y)dxdy\Big)\Big(\int_c^d (h(z)dz\Big)$$

1.5. **Invariance par isométries.**

Théorème 1.39. *Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) un domaine régulier borné. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (ou $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$) une isométrie. Alors Aire$(\phi(D))$ = Aire(D) (ou Vol$(\phi(D))$ = Vol(D)).*

L'intégrale d'une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, c'est le volume de l'hypographe de f. Quand on déplace la fonction par une isométrie, l'hypographe de la nouvelle fonction s'obtient en déplaçant l'hypographe de départ par une isométrie de $\mathbb{R}^3$. Donc l'intégrale ne change pas. Ceci montre le résultat suivant.

Théorème 1.40.
Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine régulier fermé borné, soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une isométrie (une translation, ou une rotation, ou une symétrie orthogonale par rapport à une droite, ou une composée quelconque de symétries orthogonales par rapport à des droites), et soit $f : \phi(D) \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors

$$\int_{\phi(D)} f(x', y')dx'dy' = \int_{\phi(D)} f(x', y')dx'dy'$$

Exemple :

$$\int_{[0,1]\times[0,1]\times[-1,+1]} \frac{1}{(x+4)(y-5)^3((z+3)^2+4)} dxdydz$$

On fait $x' = x+4, y' = y-5, z' = z+3$, de sorte que $D' = [4,5] \times [-5,-4] \times [2,4]$ s'obtient par translation de D...

Autre exemple : en utilisant l'invariance par isométrie on peut deviner que le volume d'un secteur sphérique est proportionnel à l'ouverture du secteur.

1.6. **Calculs en coordonnées polaires dans le plan.** Passer en coordonnées polaires, c'est écrire $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, où r et θ varient dans un domaine R (à préciser) lorsque (x, y) décrivent un domaine donné S (lequel ne doit pas contenir $(0, 0)$). Lors de ce passage les fonctions $f(x, y)$ sur S se transforment en fonctions $g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ sur R.

Pour $-\pi < \theta_1 \leq \theta_2 \leq \pi$ et $0 < r_1 \leq r_2$ le domaine rectangulaire $R = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2, r_1 \leq r \leq r_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$ correspond en (x, y) au rectangle curviligne $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, r_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_2^2, x\sin\theta_2 - y\cos\theta_2 \geq 0 \geq\}$. L'aire d'un secteur angulaire de rayon r d'ouverture α est $\frac{1}{2}\alpha r^2$, donc l'aire du rectangle curviligne S est $\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)(r_2^2 - r_1^2)$, ce n'est pas l'aire du rectangle R, la formule tentante $\int_R g(r, \theta)drd\theta = \int_S f(x, y)dxdy$ est donc fausse (pour $f = 1$) ! Il faut donc impérativement introduire un coefficient pour pouvoir passer de l'intégration sur S à l'intégration sur R.

En fait la bonne formule est :

$$\int_R g(r, \theta)rdrd\theta = \int_S f(x, y)dxdy, \int_R g(r, \theta)drd\theta = \int_S \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}dxdy$$

1) Remarque: c'est cohérent avec l'aire d'un secteur D', i.e. la formule est juste pour $f = 1$ et $D =$ un rectangle.

2) Esquisse de preuve. On se contente de montrer la formule pour $D = [a, b] \times [c, d]$, ensuite ce sera vrai pour tout domaine $D \subset \mathbb{R}^+ \times [-\pi, +\pi]$ en écrivant D comme une union croissante de domaines D_n qui se découpent en rectangles, de sorte que Aire$(D \setminus D_n) \to 0$.

a) Pour $D = [a, b] \times [c, d]$ et f quelconque, on découpe D en n^2 rectangles $R_{ij} = [a + (i-1)\frac{b-a}{n}, a + i\frac{b-a}{n}] \times [c + (i-1)\frac{d-c}{n}, c + i\frac{d-c}{n}]$.

Dans D' on obtient un découpage par petits secteurs angulaires $S_{ij}\phi(R_{ij})$.

Donc $\int_{D'} f(x,y)dxdy = \sum_{ij}\int_{S_{ij}} f(x,y)dxdy$ et de même $\int_D rf(r\cos\theta, r\sin\theta)drd\theta = \sum_{ij}\int_{R_{ij}} rf(r\cos\theta, r\sin$

b) Formule de la moyenne : nous avons déjà remarqué que pour g continue sur un rectangle R, on a:

$$\mathrm{Min}_{(s,t)\in R}(g(s,t)) \times \mathrm{Aire}(R) \leq \int_R g(s,t)dsdt \leq \mathrm{Max}_{(s,t)\in R}(g(s,t)) \times \mathrm{Aire}(R)$$

Soit $A_1 = (s_1, t_1) \in R$ un point où g atteint son minimum, et soit $A_2 = (s_2, t_2) \in R$ un point où g atteint son maximum. Tout le segment $[A_1A_2]$ est dans le rectangle R, et comme g est continue la fonction $\gamma : [0,1] \ni u \mapsto g(us_2 + (1-u)s_1, ut_2 + (1-u)t_1)$ est continue sur $[0,1]$. Alors $\gamma(t) \leq \mathrm{Max}_{(s,t)\in R}(g(s,t)) = \gamma(1)$, d'où $\mathrm{Max}_{[0,1]}(\gamma(u)) = \gamma(1)$. De même $\mathrm{Min}_{[0,1]}(\gamma(u)) = \gamma(0)$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires γ prend toutes les valeurs entre $\mathrm{Min}_{(s,t)\in R}(g(s,t))$ et $\mathrm{Max}_{(s,t)\in R}(g(s,t))$, donc pour un certain u_0 on a

$$\gamma(u_0) = \frac{\int_R g(s,t)dsdt}{\mathrm{Aire}(R)}$$

Alors au point $A_0 = (u_0s_2 + (1-u_0)s_1, u_0t_2 + (1-u_0)t_1)$ on a $g(A_0) = \frac{\int_R g(s,t)dsdt}{\mathrm{Aire}(R)}$. Autrement dit nous avons montré la formule de la moyenne :

Il existe toujours (au moins) un point $A_0 \in R$ tel que :

$$\int_R g(s,t)dsdt = g(A_0) \times \mathrm{Aire}(R)$$

c) Appliquons la formule de la moyenne sur R_{ij} et sur S_{ij}. Donc il existe des points $A_{ij} \in R_{ij}$ et $B_{ij} \in S_{ij}$ tels que :

$\int_{S_{ij}} f(x,y)dxdy = f(B_{ij}) \times \mathrm{Aire}(S_{ij})$ et $\int_{R_{ij}} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)drd\theta = r(A_{ij})f(A_{ij}) \times \mathrm{Aire}(R_{ij})$.

d) On a $\mathrm{Aire}(R_{ij}) = \frac{1}{n^2}(b-a)(d-c)$ et $\mathrm{Aire}(S_{ij}) = \frac{1}{2}\frac{d-c}{n}[(a+i\frac{b-a}{n})^2 - (a+(i-1)\frac{b-a}{n})^2] = \frac{1}{2}\frac{d-c}{n}\frac{b-a}{n}[2(a+(i-1)\frac{b-a}{n}+\frac{b-a}{n}] = \frac{1}{n^2}(b-a)(d-c)[r(\text{sommet de}R_{ij})+\frac{b-a}{2n}] = \mathrm{Aire}(R_{ij})[r(\text{sommet de}R_{ij})+\frac{b-a}{2n}]$.

Ainsi, à une quantité négligeable près,

$$\mathrm{Aire}(S_{ij}) \simeq \mathrm{Aire}(R_{ij})r(\text{sommet de}R_{ij})$$

e) Alors, en notant A'_{ij} le point de R_{ij} tel que $B_{ij} = \phi(A'_{ij})$:

$$|\int_{S_{ij}} f(x,y)dxdy - \int_{R_{ij}} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)drd\theta|$$

$$= |f(\phi(A'_{ij})) \times \mathrm{Aire}(R_{ij})[r(\text{sommet de}R_{ij}) + \frac{b-a}{2n}] - r(A_{ij})f(\phi(A_{ij})) \times \mathrm{Aire}(R_{ij})|$$

$$\leq \mathrm{Aire}(R_{ij}) \times |[f(\phi(A'_{ij}))r(\text{sommet de}R_{ij}) - r(A_{ij})f(\phi(A_{ij}))] + f(\phi(A'_{ij}))\frac{b-a}{2n}]|$$

Le premier et le deuxième terme deviennent $< \varepsilon$ pour n assez grand, donc pour n assez grand :

$$|\int_{S_{ij}} f(x,y)dxdy - \int_{R_{ij}} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)drd\theta| \leq \varepsilon\mathrm{Aire}(R_{ij})$$

Il en résulte que

$$|\int_S f(x,y)dxdy - \int_R rf(r\cos\theta, r\sin\theta)drd\theta| \leq \varepsilon(\sum_{ij}\mathrm{Aire}(R_{ij})) = \varepsilon\mathrm{Aire}(R)$$

Les deux intégrales sont donc égales.

Remarque : ce qu'il faut retenir de cette preuve c'est que ce qui compte dans le changement de variable c'est la façon dont ϕ transforme l'aire des rectangles infinitésimaux : un rectangle infinitésimal d'aire $dxdy$ correspond à un rectangle d'aire $rdrd\theta$.

3) Application.

On pose $I(A) = \int_{-A}^{+A} e^{-t^2}dt$. Déterminer $\lim_{t\to+\infty} I(A)$.

Attention : $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive, mais cette primitive n'est pas une fonction usuelle.

L'astuce est d'introduire $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ et de l'intégrer sur divers domaines.

a) Par Fubini $[I(A)]^2 = \int_{R_A} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ avec $R_A = [-A,+A]^2$.

b) En polaires : $\int_{D_A} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_{0\leq r\leq A, -\pi\leq\theta\leq+\pi} re^{-r^2}drd\theta = \pi(1-e^{-A^2})$ avec $D_A = \{x^2+y^2 \leq A^2\}$.

c) Encadrement : on a $D_A \subset R_A \subset D_{\sqrt{2}A}$ et $f \geq 0$ donc

$$\int_{D_A} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \leq \int_{R_A} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \leq \int_{D_{\sqrt{2}A}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

Soit $\pi(1-e^{-A^2}) \leq [I(A)]^2 \leq \pi(1-e^{-2A^2})$ et donc $\lim_{t\to+\infty} I(A) = \sqrt{\pi}$.

1.7. **Calculs en coordonnées cylindriques dans l'espace.**

On peut représenter tout point (x,y,z) de l'espace $\mathbb{R}^3$ sous la forme $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$ avec $r \in [0,+\infty[, \theta \in [-\pi,\pi], z \in \mathbb{R}$. Autrement dit si on pose $\phi(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ on peut représenter tout point $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ sous la forme $(x,y,z) = \phi(r,\theta,z)$.

Théorème 1.41 (changement de coordonnées cylindriques)**.** *Soit $D \subset \mathbb{R}^+ \times [-\pi,\pi] \times \mathbb{R}$ un domaine (fermé borné). Soit $D' = \phi(D) \subset \mathbb{R}^3$ le domaine correspondant (dans les variables (x,y,z)). Pour toute fonction continue $f : D' \to \mathbb{R}$ on a :*

$$\int_{D'} f(x,y,z)dxdydz = \int_D f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)rdrd\theta dz$$

1) Justification : un parallélépipède $R = [r_1,r_2] \times [\theta_1,\theta_2] \times [z_1,z_2]$ de $\mathbb{R}^+ \times [-\pi,+\pi] \times \mathbb{R}$ est transformé par $\phi : (r,\theta,z) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ en un prisme droit S de base un secteur d'aire $(\theta_2-\theta_1) \times \frac{r_2^2-r_1^2}{2}$, et de hauteur $z_2 - z_1$, donc (par Fubini en piles !) de volume

$$(\theta_2-\theta_1) \times \frac{r_2^2-r_1^2}{2}(z_2-z_1)$$

Le quotient $\frac{\text{Volume}(S)}{\text{Volume}(R)}$ vaut $\frac{r_1+r_2}{2}$ et tend donc vers r lorsque $r_2 \to r, r_1 \to r$.

2) Calcul d'un volume.

Pour $R \geq 0$ et $t \geq 0$ on considère le solide $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, t^2(x^2+y^2) \leq z^2, x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$. Calculer son volume.

D'abord représenter S !!!

Alors on voit que S est l'intersection d'un cône avec une sphère, donc S est en tranche verticales au dessus d'un certain disque (de centre 0 et de rayon $\frac{R}{\sqrt{1+t^2}}$ - i.e. en posant $t = \tan\varphi$ c'est $R_0 = R\cos\varphi$) : les coordonnées cylindriques sont adaptées.

Ainsi

$$\text{Volume}(S) = \int_S 1dxdydz = \int_D dxdy(\int_{z=t\sqrt{x^2+y^2}}^{z=\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}} 1dz)$$

$$= \int_D (\sqrt{R^2-(x^2+y^2)} - t\sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int_{r\in[0,R_0],\theta\in[-\pi,\pi]} (\sqrt{R^2-r^2} - tr)rdrd\theta$$

en passant en polaires. D'où :

$$\text{Volume}(S) = 2\pi(\frac{1}{3}[(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}]_{R_0}^{0} - t[\frac{r^3}{3}]_0^{R_0}) = \frac{2\pi}{3}R^3(1-\sin\varphi)$$

1.8. **Calculs en coordonnées sphériques dans l'espace.** Passer en coordonnées *sphériques*, c'est écrire $x = r\cos\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\cos\varphi$ et $z = r\sin\varphi$, où r, θ, φ varient dans un domaine R (à préciser) lorsque (x, y, z) décrivent un domaine donné S (lequel ne doit pas contenir la verticale en $(0, 0, 0)$). Lors de ce passage les fonctions $f(x, y, z)$ sur S se transforment en fonctions $g(r, \theta, \varphi) = f(r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi)$ sur R.

Ce qui compte c'est comment ϕ transforme le volume d'un parallélépipède infinitésimal $[r, r + dr] \times [\theta, \theta + d\theta] \times [\varphi, \varphi + d\varphi]$.

Pour cela on calcule le volume (noté $V(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2, \varphi_1, \varphi_2)$) de l'image d'un parallélépipède normal $[r_1, r_2] \times [\theta_1, \theta_2] \times [\varphi_1, \varphi_2]$. Par découpage on a :

$V(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2, \varphi_1, \varphi_2) = V(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2, \varphi_1, 0) - V(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2, \varphi_2, 0) = V(r_1, 0, \theta_1, \theta_2, \varphi_1, 0) - V(r_2, 0, \theta_1, \theta_2, \varphi_1, 0) - V(r_1, 0, \theta_1, \theta_2, \varphi_2, 0) + V(r_2, 0, \theta_1, \theta_2, \varphi_2, 0)$.

On est ramené à calculer $V(R, 0, \theta_1, \theta_2, \varphi, 0)$ qu'on note $V(R, \theta_1, \theta_2, \varphi)$. L'invariance du volume par rotation assure que $V(R, \theta_1, \theta_2, \varphi)$ est proportionnel à $\theta_2 - \theta_1$, donc il suffit de considérer le cas $\theta_2 = +\pi, \theta_1 = -\pi$ (on note alors $V(R, \varphi)$ le volume). Mais alors le solide considéré est le complémentaire dans la demi-boule de la toupie conique/sphérique dont on a déjà calculé le volume. On trouve :

$V(R, \varphi) = \frac{2\pi}{3}R^3 - [\frac{2\pi}{3}R^3(1-\sin\varphi)] = \frac{2\pi}{3}R^3\sin\varphi$ et donc

$$V(R, \theta_1, \theta_2, \varphi) = \frac{\theta_2-\theta_1}{3}R^3\sin\varphi$$

Alors

$V(r, r+dr, \theta, \theta+d\theta, \varphi, \varphi+d\varphi) = V(r, \theta, \theta+d\theta, \varphi) - V(r+dr, \theta, \theta+d\theta, \varphi) - V(r, \theta, \theta+d\theta, \varphi + d\varphi) + V(r+dr, \theta, \theta+d\theta, \varphi+d\varphi) \simeq d\theta[r^2dr\sin\varphi - r^2dr\sin(\varphi+d\varphi)] = d\theta[r^2dr\cos\varphi d\varphi]$

La formule est donc

$$\int_R g(r, \theta, \varphi)r^2\cos\varphi drd\theta d\varphi = \int_S f(x, y, z)dxdydz$$