Cours de mathématiques.

1. Equations différentielles linéaires du second ordre.

La fonction $C : x \mapsto \cos x$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, et $C'(x) = -S(x)$, avec $S : x \mapsto \sin x$. Il en résulte que $C''(x) = -C(x)$, soit $C''(x) + C(x) = 0$. Ainsi C et sa dérivée seconde satisfont une relation : on dit que C est solution de l'équation différentielle $(E)\ :\ y'' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Problème 1.1. Quelles sont les autres solutions ?

Nous allons répondre à cette question pour des équations différentielles généralisant $y'' + y = 0$. Mais d'abord considérons un problème plus simple.

1.1. **Equations différentielles linéaires du premier ordre.**

Définition 1.2. Soient a, b deux réels avec $a \neq 0$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I. Alors $(E)\ :\ ay' + by = f$ est une *équation différentielle linéaire du premier ordre (à coefficients constants).*

Si $f = 0$ on dit que l'équation est *homogène.*

Une *solution de* (E) *sur un intervalle* $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction $y : x \mapsto y(x)$ définie et deux fois dérivable sur I, telle que

$$\forall x \in I,\ ay'(x) + by(x) = f(x).$$

Nous noterons $\mathcal{S}ol_I(E)$ l'ensemble des solutions sur I de (E).

Résoudre - ou "intégrer" - l'équation (E), c'est décrire explicitement toutes les solutions.

Exemple 1.3.

(1) $y' + y = 0$
(2) $y' - y = 0$
(3) $y' + 2y = 1$
(4) $2y'(x) - 4y(x) = x^2 - 2$

Théorème 1.4 (résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre)**.** *Soient a, b deux réels avec $a \neq 0$. Alors les solutions (sur $\mathbb{R}$) de l'équation différentielle linéaire homogène $(E_0)\ :\ az' + bz = 0$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda \exp(-\frac{b}{a}x)$ (pour λ un paramètre réel).*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I. Supposons que y_0 est une solution (sur I) de l'équation différentielle linéaire (du premier ordre) $(E)\ :\ ay' + by = f$. Alors y est solution de (E) sur $I \iff y$ est de la forme $y(x) = y_0(x) + z(x)$, où z est une solution de l'équation $az' + bz = 0$ (donc donnée par la formule ci-dessus).

L'équation (E) admet toujours une solution particulière de la forme $x \mapsto \lambda(x) \exp(-\frac{b}{a}x)$ (maintenant $x \mapsto \lambda(x)$ est une fonction, plus une constante). On obtient $\lambda(x) = \frac{1}{a}\int^x \exp(\frac{b}{a}s) f(s) ds$.

Enfin pour tout $t_0 \in I$ et tout $y_0 \in \mathbb{R}$ il existe une et une seule solution y de (E) telle que $y(t_0) = y_0$.

Exemple 1.5. Résoudre $2y'(x) - 4y(x) = x^2 - 2$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'unique solution y telle que $y(0) = 1$.

1.2. **Equations différentielles linéaires du second ordre homogène.**

Définition 1.6. Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$. Alors $(E)\ :\ ay''+by'+cy=0$ est une *équation différentielle linéaire du second ordre homogène.* Une *solution de* (E) *sur un intervalle* $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction $y : x \mapsto y(x)$ définie et deux fois dérivable sur I, telle que

$$\forall x \in I,\ ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0.$$

Nous noterons $\mathcal{S}ol_I(E)$ l'ensemble des solution sur I de (E).

Exemple 1.7.
(1) $y'' + y = 0$
(2) $y'' - y = 0$
(3) $y'' + y' + y = 0$
(4) $y'' - 4y' + 4y = 0$
(5) $y'' + 4y' + 3y = 0$

Définition 1.8. Soit a, b, c trois réels (avec $a \neq 0$) et soit $(E)\ :\ ay'' + by' + cy = 0$ l'équation différentielle linéaire du second ordre homogène associée. Le *polynôme caractéristique de* (E) est $P_E(t) = at^2 + bt + c$.

Le polynôme caractéristique est toujours de degré 2, puisque $a \neq 0$.

Théorème 1.9 (solutions en fonction des racines du polynôme caractéristique)**.** *Soit a, b, c trois réels (avec $a \neq 0$) et soit $(E)\ :\ ay'' + by' + cy = 0$ l'équation différentielle linéaire du second ordre homogène associée.*
(1) *Si le polynôme caractéristique P_E admet deux racines réelles distinctes r, s alors $\mathcal{S}ol_I(E)$ est l'ensemble des fonctions de la forme $y : I \ni x \mapsto \lambda \exp(rx) + \mu \exp(sx)$ où λ, μ sont deux paramètres réels quelconques (et ce pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$).*
(2) *Si le polynôme caractéristique P_E admet une racine réelle double r alors $\mathcal{S}ol_I(E)$ est l'ensemble des fonctions de la forme $y : I \ni x \mapsto \lambda \exp(rx) + \mu x \exp(rx)$ où λ, μ sont deux paramètres réels quelconques (pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$).*
(3) *Si le polynôme caractéristique P_E admet deux racines complexes distinctes $z = r + i\theta, \overline{z} = r - i\theta$ alors $\mathcal{S}ol_I(E)$ est l'ensemble des fonctions de la forme $y : I \ni x \mapsto \exp(rx)\big(\lambda \cos(\theta x) + \mu \sin(\theta x)\big)$ où λ, μ sont deux paramètres réels quelconques (pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$).*

Lemme 1.10 (opérations sur les solutions)**.** *Quand on considère une équation homogène, on peut ajouter deux solutions ou multiplier une solution par une constante.*
(1) *Si $y : I \to \mathbb{R}$ est solution de (E_0) et $\lambda \in \mathbb{R}$ est un réel quelconque alors $\lambda y : I \ni x \mapsto \lambda y(x)$ est encore solution.*
(2) *Si $y_1 : I \to \mathbb{R}$ et $y_2 : I \to \mathbb{R}$ sont solutions de (E_0) alors $y_1 + y_2 : I \ni x \mapsto \lambda y_1(x) + y_2(x)$ est encore solution.*

Remarque 1.11. Attention le lemme n'est vrai qu'avec l'équation homogène !

La forme des solutions dans le cas des racines complexes conjuguées s'explique en utilisant l'exponentielle complexe :

Remarque 1.12. Pour tout complexe $z = a + ib$ on note e^z le nombre complexe produit $Z = e^a(\cos b + i \sin b)$, de partie réelle $A = e^a \cos b$, et de partie imaginaire $B = e^a \sin b$.

Si $a(x), b(x)$ sont des fonctions dérivables par rapport à x (sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$), alors on dit que $z(x)$ est dérivable par rapport à x, et on note $\frac{dz}{dx}$, ou $z'(x)$, le complexe $a'(x) + ib'(x)$. (On peut penser à $z(x)$ comme à un point mobile dans le plan complexe, et $z'(x)$ représente alors sa vitesse.)

On remarque alors que les parties réelles et imaginaires de $Z(x) = e^{z(x)}$, qui sont $A(x) = e^{a(x)}\cos(b(x))$ et $B(x) = e^{a(x)}\sin(b(x))$, sont elles-mêmes dérivables. De plus (par définition) $Z'(x) = A'(x) + iB'(x) = (a'(x)A(x) - b'(x)B(x)) + i(a'(x)B(x) + b'(x)A(x)) = a'(x)(A(x) + iB(x)) + b'(x)(-B(x) + iA(x)) = (a'(x) + ib'(x))(A(x) + iB(x))$.

Autrement dit $\frac{d}{dx}e^{z(x)} = z'(x)e^{z(x)}$.

Appliquons cette règle de dérivation très simple au cas où $z(x) = (r+i\varphi)x$, i.e. $a(x) = rx, b(x) = \varphi x$. Nous obtenons $\frac{d}{dx}e^{(r+i\varphi)x} = (r+i\varphi)e^{(r+i\varphi)x}$.

Alors le calcul fait au début donne :

$$a\frac{d^2}{dx^2}e^{(r+i\varphi)x} + b\frac{d}{dx}e^{(r+i\varphi)x} + ce^{(r+i\varphi)x} = (a(r+i\varphi)^2 + b(r+i\varphi) + c)e^{(r+i\varphi)x}$$

Donc si $r + i\varphi$ est racine de P_E alors $x \mapsto e^{(r+i\varphi)x}$ est solution. Dans ce cas $r - i\varphi$ est aussi racine de P_E et donc $x \mapsto e^{(r-i\varphi)x}$ est solution. La demi-somme des deux solutions est encore solution, et c'est $x \mapsto e^{rx}\cos(\varphi x)$.

1.3. **Equations différentielles linéaires du second ordre avec second membre.**

Définition 1.13. Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$. Soit $u : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $(E)\ :\ ay'' + by' + cy = u$ (ou $(E)\ :\ ay''(x) + by'(x) + cy(x) = u(x)$) est une *équation différentielle linéaire du second ordre* (avec second membre u). Une *solution de* (E) *sur l'intervalle* I est une fonction $y : x \mapsto y(x)$ définie et deux fois dérivable sur I, telle que

$$\forall x \in I,\ ay''(x) + by'(x) + cy(x) = u(x).$$

Nous noterons $\mathcal{S}ol_I(E)$ l'ensemble des solution sur I de (E). Nous noterons (E_0) l'équation différentielle linéaire du second ordre homogène associée, i.e. $(E_0)\ :\ ay'' + by' + cy = 0$.

Exemple 1.14.
(1) $y'' + y = \sin$
(2) $y''(x) - y(x) = 2x$
(3) $y''(x) + y'(x) + y(x) = \exp x$
(4) $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = x^2\exp(2x)$
(5) $y'' + 4y' + 3y = (x-4)\exp(-x)$

Théorème 1.15 (espace des solutions)**.** *Soit* $u : I \to \mathbb{R}$ *continue et soit* $(E)\ :\ ay'' + by' + cy = u$ *une équation différentielle linéaire du second ordre. Alors pour toute solution* y_0 *de* (E) *on a :*

$$\mathcal{S}ol_I(E) = y_0 + \mathcal{S}ol_I(E_0)$$

Autrement dit pour toute solution z *de* (E_0) *sur* I *l'application* $y := z + y_0$ *est solution de* (E) *sur* I*. Et réciproquement pour toute solution* y *de* (E) *sur* I *l'application* $z := y - y_0$ *est solution de* (E_0) *sur* I*.*

Pour résoudre (E) le problème est donc maintenant d'arriver à trouver une solution particulière y_0.

2. Solutions particulières avec second membre $u(x) = P(x)e^{sx}$ et autres.

Pour certains types de seconds membres une observation simple permet de faire aboutir les calculs.

Supposons $y(x) = Q(x)\exp(sx)$, où Q est un polynôme. Nous avons alors

$$y'(x) = Q'(x)\exp(sx) + Q(x)\big(s\exp(sx)\big) = \big(Q'(x) + sQ(x)\big)\exp(sx)$$

de sorte que y' a la même forme que y (sauf que $Q(x)$ est remplacé par $Q'(x) + sQ(x)$). On en déduit alors sans calcul supplémentaire:

$$y''(x) = \big([Q'(x) + sQ(x)]'(x) + s[Q'(x) + sQ(x)]\big)\exp(sx) = \big(Q''(x) + 2sQ'(x) + s^2Q(x)\big)\exp(sx)$$

Supposons maintenant donnée une équation différentielle linéaire du second ordre $(E)\ :\ ay''(x) + by'(x) + cy(x) = P(x)\exp(sx)$. Les calculs de dérivations des fonctions de la forme $Q(r)\exp(sx)$ suggèrent de chercher une solution particulière sous la forme

$$y_0(x) = Q(x)\exp(sx)$$

avec donc Q un polynôme à déterminer en fonction de P et s.

On obtient

$$ay_0''(x) + by_0'(x) + cy_0(x) = \big(a[Q''(x) + 2sQ'(x) + s^2Q(x)] + b[Q'(x) + sQ(x)] + cQ(x)\big)\exp(sx)$$

$$= \big(aQ''(x) + (2as + b)Q'(x) + (as^2 + bs + c)Q(x)\big)\exp(sx)$$

Et donc y_0 solution de (E) ssi

$$(R)\ :\ aQ''(x) + (2as + b)Q'(x) + (as^2 + bs + c)Q(x) = P(x)$$

En général $as^2 + bs + c (= P_E(s)\ !)$ est non nul, alors, par identification des coefficients, on peut trouver exactement un polynôme Q de même degré que P tel que la relation (R) soit satisfaite. Si $P_E(s) = 0$ mais $2as + b (= P_E'(s)\ !!)$ est non nul, alors on peut trouver exactement un polynôme Q de degré un de plus que P tel que la relation (R) soit satisfaite, et de plus $Q(0) = 0$. Enfin si $P_E(s) = P_E'(s) = 0$, alors comme $a \neq 0$ on peut trouver exactement un polynôme Q de degré deux de plus que P tel que la relation (R) soit satisfaite, et de plus $Q(0) = Q'(0) = 0$.

On voit que dans tous les cas la méthode précédente permet de trouver une solution particulière.

Remarque 2.1. Certes il faut connaître l'origine de la méthode (i.e. les calculs de dérivées de $Q(x)\exp(sx)$), mais dans la pratique, ce qu'il faut savoir c'est qu'on peut toujours chercher une solution particulière de la forme (polynôme) fois (exponentielle de même base) : un calcul général du cours assure qu'on en trouvera une !

Ceci permet aussi de traiter des seconds membres de la forme $u(x) = P_1(x)\exp(s_1x) + P_2(x)\exp(s_2x) + \cdots + P_n(x)\exp(s_nx)$, en vertu de la proposition suivante:

Proposition 2.2 (superposition des solutions)**.** *Soit* $u_1 : I \to \mathbb{R}, u_2 : I \to \mathbb{R}, \ldots, u_n : I \to \mathbb{R}$ *des applications continues et soit* $(E)\ :\ ay'' + by' + cy = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ *une équation différentielle linéaire du second ordre. Si* y_1 *est solution sur* I *de* $(E_1)\ :\ ay'' + by' + cy = u_1$, y_2 *est solution sur* I *de* $(E_2)\ :\ ay'' + by' + cy = u_2$, $\ldots$, y_n *est solution sur* I *de* $(E_n)\ :\ ay'' + by' + cy = u_n$, *alors la somme* $y_1 + y_2 + \cdots + y_n$ *est solution sur* I *de* (E).

Exemple 2.3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E)\ :\ y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = x\exp(2x) - 2x^2\exp(x)$.

On peut encore trouver une solution particulière lorsque le second membre est de la forme $u(x) = P_1(x)\cos(\varphi x) + P_2(x)\sin(\varphi x)$. La méthode est formellement la même que précédemment. En écrivant $\cos(\varphi x) = \frac{\exp(i\varphi x)+\exp(-i\varphi x)}{2}$ et $\sin(\varphi x) = \frac{\exp(i\varphi x)-\exp(-i\varphi x)}{2i}$ on voit que

$$u(x) = \frac{P_1(x) - iP_2(x)}{2}\exp(i\varphi x) + \frac{P_1(x) + iP_2(x)}{2}\exp(-i\varphi x) = \mathrm{Re}(\frac{P_1(x) - iP_2(x)}{2}\exp(i\varphi x))$$

Comme précédemment il existe un polynôme Q à coefficients complexes, soit $Q(x) = Q_1(x)+iQ_2(x)$ avec Q_1, Q_2 à coefficients réels, tel que $z_0(x) = Q(x)\exp(i\varphi x)$ vérifie

$$az_0''(x) + bz_0'(x) + cz_0(x) = \frac{P_1(x) - iP_2(x)}{2}\exp(i\varphi x)$$

Alors $x \mapsto y_0(x) = \mathrm{Re}(Q(x)\exp(i\varphi x)) = Q_1(x)\cos(\varphi x) - Q_2(x)\sin(\varphi x)$ est solution particulière de (E) sur I.

Ce qu'il faut retenir c'est que dans ce cas-là, il existe toujours une solution particulière de la forme polynôme $\cos(\varphi x)$ + polynôme $\sin(\varphi x)$.

Nous admettrons le résultat suivant, que nous avons démontré lorsque u est une somme de fonctions de la forme $P(x)\exp(sx), Q(x)\cos(\varphi x), R(x)\sin(\psi x)$:

Théorème 2.4. *Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$. Soit $u : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $(E)\ :\ ay'' + by' + cy = u$ admet toujours une solution sur I.*

2.1. **Existence et unicité d'une solution avec conditions initiales fixées.**

Théorème 2.5. *Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$. Soit $u : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $t_0 \in I$ et soient $(y_0, y_0') \in \mathbb{R}^2$ quelconques. Alors $(E)\ :\ ay'' + by' + cy = u$ admet une et une seule solution $y : I \to \mathbb{R}$ telle que $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_0'$.*

Proof. L'équation (E) admet toujours une solution y_1 sur I (voir Théorème 2.4), et toute autre solution y s'écrit $y = y_1 + z$ avec z solution de l'équation différentielle linéaire homogène associée (voir Théorème 1.15. Il suffit donc de prouver le résultat pour les équations linéaires homogènes.

Compte tenu du Théorème 1.9, un examen au cas par cas (deux racines réelles distinctes, une racine réelle double ou deux racines complexes non réelles mais conjuguées) permet de conclure - il s'agit de systèmes linéaires 2×2 à résoudre.

$\square$