

COURS DE MATHÉMATIQUES : ALGÈBRE LINÉAIRE (PREMIÈRE PARTIE).

TABLE DES MATIÈRES

1. Opérations sur les vecteurs.	1
1.1. Sommes de vecteurs.	1
1.2. Multiplication d'un vecteur par un réel.	2
1.3. Combinaisons linéaires.	2
1.4. Utilisation des systèmes linéaires pour résoudre une équation vectorielle.	3
2. Suites génératrices, sous-espace vectoriel engendré.	3
3. Suites libres.	6
4. Parties génératrices, parties libres.	7
5. Bases et coordonnées dans une base.	8
6. L'algorithme du rang.	10
6.1. Suites libres et Vect.	10
6.2. Extraire une suite libre en conservant le même sous-espace vectoriel engendré.	10
7. Dimension.	11
7.1. Définition de la dimension.	11
7.2. Longueur des suites libres ou génératrices.	12
8. Intersection et somme de deux sous-espaces vectoriels.	14
9. Systèmes d'équations cartésiennes.	18
10. Quelques méthodes (indicatives).	19
10.1.	19
10.2.	19
10.3.	19
10.4.	20
10.5.	20
10.6.	20
10.7.	20
10.8.	20
10.9.	20

1. OPÉRATIONS SUR LES VECTEURS.

1.1. Sommes de vecteurs.

Définition 1.1 (somme de deux n -vecteurs). Soit n un entier fixé mais indéterminé, $n \geq 1$. Soient $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ deux n -vecteurs. Alors $u + v$ est le n -vecteur

$$(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

autrement dit le n -vecteur dont la k -ième composante est $x_k + y_k$ (pour chaque $k = 1, 2, \dots, n$).

Exemples : $(1, -2) + (-3, 5) = (-2, 3)$, $(1, 2, 3) + (3, 2, 1) = (4, 4, 4)$.

ATTENTION : il est impossible d'ajouter un n -vecteur et un m -vecteur si $n \neq m$!

Proposition 1.2 (quelques propriétés).

- (1) L'addition des vecteurs ne dépend pas de l'ordre : $u + v = v + u$. En effet $x_k + y_k = y_k + x_k$.
- (2) L'addition du vecteur nul ne change pas le vecteur : $u + (0, \dots, 0) = u$
- (3) Tout vecteur u admet un opposé, c'est à dire un vecteur u' tel que $u + u' = 0$. En effet il est nécessaire et suffisant de prendre $u' = (x'_1, \dots, x'_n)$ avec $x'_k = -x_k$. On notera $u' = -u$. Par définition, pour v un autre n -vecteur, la différence $v - u$ est la somme $v + u'$.
- (4) (règle de simplification) Si $u + v = u + w$ alors $v = w$.
- (5) (associativité) $(u + v) + w = u + (v + w)$, qu'on notera donc $u + v + w$ sans plus préciser les parenthèses. Plus généralement la somme de k vecteurs u_1, \dots, u_k de \mathbb{R}^n est bien définie sans avoir à préciser le parenthésage : $u_1 + \dots + u_k$ (ou $\sum_{i=1}^k u_i$ en abrégé) est le vecteur dont la première composante est la somme des premières composantes de u_1, \dots, u_k , la deuxième composante est la somme des deuxièmes composantes de u_1, \dots, u_k , et ainsi de suite pour les autres composantes. Si on veut on peut aussi définir la somme de k vecteurs par récurrence sur $k \geq 1$: la somme de k vecteurs ayant été définie, on pose $u_1 + \dots + u_k + u_{k+1} = (u_1 + \dots + u_k) + u_{k+1}$. L'important c'est qu'on a toujours $(u_1 + \dots + u_k) + (u_{k+1} + \dots + u_{k+\ell}) = u_1 + \dots + u_{k+\ell}$.

1.2. Multiplication d'un vecteur par un réel.

Définition 1.3 (multiplication d'un n -vecteur par un réel). Soit n un entier fixé mais indéterminé, $n \geq 1$. Soient $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un n -vecteur et λ un réel. Alors λu est le n -vecteur

$$(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n),$$

autrement dit dont la k -ième composante est λx_k .

ATTENTION : il est (en général) impossible de multiplier des n -vecteurs entre eux !

Proposition 1.4 (quelques propriétés).

- (1) La multiplication par 0 annule le vecteur : $0u = (0, 0, \dots, 0)$.
- (2) La multiplication par 1 ne change pas le vecteur : $1u = u$.
- (3) La multiplication par -1 change le vecteur en son opposé : $(-1)u = -u$.
- (4) (règle de simplification) Si $\lambda u = \lambda v$ ET $\lambda \neq 0$ alors $u = v$.
- (5) (associativité) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$, qu'on notera donc $\lambda\mu u$ sans plus préciser les parenthèses.
- (6) (distributivité) On a $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ et $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$ pour $u, v \in \mathbb{R}^n$ quelconques et λ, μ des réels quelconques.

La vérification de ces règles se fait composantes par composantes.

1.3. Combinaisons linéaires.

Définition 1.5 (combinaisons linéaires). Soit n un entier fixé mais indéterminé, $n \geq 1$. On considère une suite de k vecteurs u_1, \dots, u_k de \mathbb{R}^n et une suite de k nombres réels $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Alors le vecteur $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k$ est appelé *combinaison linéaire* de la suite de vecteurs (u_1, \dots, u_k) (de coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_k$).

Lorsque $k = 1$ la combinaison linéaire est simplement $\lambda_1 u_1$ (pas de sommes de vecteurs, juste une multiplication par un réel).

Exemple 1.6.

$$x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = (x, y, z).$$

$$2(1, 2, 3, 4) - 4(1, 1, 1, 1) + 2(1, 0, -1, -2) = (0, 0, 0, 0)$$

On remarque que tout n -vecteur $u = (x_1, \dots, x_n)$ est combinaison linéaire de la suite de vecteurs (e_1, e_2, \dots, e_n) affectés des coefficients x_1, \dots, x_n . En plus on voit que la seule combinaison linéaire de (e_1, e_2, \dots, e_n) qui donne (x_1, \dots, x_n) , c'est celle de coefficients x_1, \dots, x_n . (On note comme toujours e_i le n -vecteur dont toutes les composantes sont nulles, sauf la i -ème, égale à 1.)

Deux problèmes. Une suite de vecteurs (f_1, f_2, \dots, f_k) est donnée dans l'espace \mathbb{R}^n . On se pose les questions suivantes :

- (1) Quels vecteurs peut-on fabriquer à partir de la suite (f_1, f_2, \dots, f_k) en faisant toutes les combinaisons linéaires possibles ? (c'est à dire en utilisant tous les coefficients possibles)
- (2) Un autre n -vecteur u étant donné, quels sont les coefficients $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ des combinaisons linéaires $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_k f_k$ qui donnent u ?

1.4. Utilisation des systèmes linéaires pour résoudre une équation vectorielle.

Soit (f_1, \dots, f_k) une suite de vecteurs de \mathbb{R}^n . Soit u un autre vecteur. Alors l'ensemble des coefficients $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ tels que $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_k f_k = u$ est exactement l'ensemble des solutions d'un système linéaire aux inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ ayant n équations, dont la i -ème est $\lambda_1 x_i(f_1) + \dots + \lambda_k x_i(f_k) = x_i(u)$ (en notant $x_i(v)$ la i -ème composante du vecteur v).

Par exemple, considérons les vecteurs

$$f_1 = (1, 2, 0, -3), f_2 = (0, -1, 1, 0), f_3 = (-1, 1, -1, 1), f_4 = (0, 2, 0, -2).$$

Pour $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ on a $x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4 = u \iff$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 & = u_1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 & = u_2 \\ x_2 - x_3 & = u_3 \\ -3x_1 + x_3 - 2x_4 & = u_4 \end{cases}$$

Donc en appliquant simplement la méthode de résolution des systèmes linéaires déjà vue, on peut résoudre tous les problèmes sur les combinaisons linéaires.

2. SUITES GÉNÉRATRICES, SOUS-ESPACE VECTORIEL ENGENDRÉ.

Définition 2.1 (suite génératrice). Une suite *génératrice* (de \mathbb{R}^n) est une suite de vecteurs (f_1, \dots, f_k) telle que tout vecteur de \mathbb{R}^n peut s'obtenir comme une certaine combinaison linéaire des f_1, \dots, f_k . On dit aussi que *la suite* (f_1, \dots, f_k) *engendre* \mathbb{R}^n .

Ainsi les suites génératrices sont celles pour lesquelles la réponse au problème (1) est : on peut fabriquer tous les vecteurs de \mathbb{R}^n .

Exemple 2.2.

Comme on l'a déjà remarqué la suite (e_1, e_2, \dots, e_n) engendre \mathbb{R}^n .

Autre exemple : $(f_1 = (2, 0), f_2 = (-1, 5))$ est une suite génératrice de \mathbb{R}^2 . Pour fabriquer $e_1 = (1, 0)$ il suffit de faire $e_1 = \frac{1}{2} f_1$. Ensuite pour fabriquer $e_2 = (0, 1)$ on voit que $e_2 = \frac{1}{5}(e_1 + f_2) = \frac{1}{10} f_1 + \frac{1}{5} f_2$. Enfin comme tout vecteur (x, y) s'écrit $(x, y) = x e_1 + y e_2$ on en déduit :

$$(x, y) = \frac{x}{2} f_1 + \frac{y}{10} f_1 + \frac{y}{5} f_2 = \frac{5x + y}{10} f_1 + \frac{y}{5} f_2$$

et (f_1, f_2) est génératrice.

Notation. Soit (f_1, \dots, f_k) une suite de vecteurs de \mathbb{R}^n . Nous noterons $\text{Vect}(f_1, \dots, f_k)$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires possibles de (f_1, \dots, f_k) .

Convention lorsque la suite est vide ($k = 0$, autrement dit il n'y a aucun vecteur dans la suite) : on pose alors $\text{Vect}() = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Avec cette notation, (f_1, \dots, f_k) engendre \mathbb{R}^n si et seulement si $\text{Vect}(f_1, \dots, f_k) = \mathbb{R}^n$. Remarquons que $\text{Vect}(f_1, \dots, f_k)$ contient toujours au moins chaque vecteur f_1, \dots, f_k : par exemple f_1 s'écrit comme la combinaison linéaire $f_1 = 1f_1 + 0f_2 + \dots + 0f_k$.

Proposition 2.3. Soit (f_1, \dots, f_k) une suite de vecteurs de \mathbb{R}^n . Alors $\text{Vect}(f_1, \dots, f_k)$ a les deux propriétés suivantes :

- (1) (passe par $0_{\mathbb{R}^n}$) $(0, 0, \dots, 0) \in \text{Vect}(f_1, \dots, f_k)$;
- (2) (stable par combinaisons linéaires) Si $u \in \text{Vect}(f_1, \dots, f_k)$ et $v \in \text{Vect}(f_1, \dots, f_k)$, si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors la combinaison linéaire $\lambda u + \mu v$ appartient à $\text{Vect}(f_1, \dots, f_k)$.

Démonstration. En considérant la combinaison linéaire $0f_1 + \dots + 0f_k$ on voit que $0_{\mathbb{R}^n} \in \text{Vect}(f_1, \dots, f_k)$.

Soient u, v deux éléments de $\text{Vect}(f_1, \dots, f_k)$, de sorte qu'on a $u = x_1f_1 + \dots + x_kf_k$ et $v = y_1f_1 + \dots + y_kf_k$ pour certains coefficients réels (x_1, \dots, x_k) et (y_1, \dots, y_k) . Alors en distribuant, en regroupant et en factorisant :

$$\lambda u + \mu v = (\lambda x_1 + \mu y_1)f_1 + \dots + (\lambda x_k + \mu y_k)f_k$$

de sorte que $\lambda u + \mu v$ est bien dans $\text{Vect}(f_1, \dots, f_k)$. □

Définition 2.4 (sous-espace vectoriel, sous-espace vectoriel engendré, suite génératrice).

Un *sous-espace vectoriel* de \mathbb{R}^n est une partie $E \subset \mathbb{R}^n$ qui vérifie les deux propriétés de la proposition 2.3 : autrement dit E contient $0_{\mathbb{R}^n}$ et E contient toutes les combinaisons linéaires de deux de ses vecteurs.

Soit (f_1, \dots, f_k) une suite de vecteurs de \mathbb{R}^n . L'ensemble $E = \text{Vect}(f_1, \dots, f_k)$ s'appelle le *sous-espace vectoriel engendré par* (f_1, \dots, f_k) , et on dit que (f_1, \dots, f_k) est une *suite génératrice* de E .

Exemple 2.5 (exemples de sous-espaces vectoriels).

Le sous-ensemble $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ est toujours un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . La partie à un seul élément $\{0_{\mathbb{R}^n}\} \subset \mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel.

En effet l'élément $0_{\mathbb{R}^n}$ appartient à la partie $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Et pour $u, v \in \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, d'abord on doit avoir $u = v = 0$, puis $\lambda u + \mu v = 0_{\mathbb{R}^n}$, donc on a bien $\lambda u + \mu v \in \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Les deux axiomes sont vérifiés.

Par exemple la suite à un seul élément $(0_{\mathbb{R}^n})$ engendre $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$. D'ailleurs la suite à trois éléments $(0_{\mathbb{R}^n}, 0_{\mathbb{R}^n}, 0_{\mathbb{R}^n})$ engendre aussi $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Autre exemple : $\text{Vect}(\vec{u})$ pour \vec{u} un vecteur (non nul) de \mathbb{R}^n . C'est exactement l'ensemble des multiples de \vec{u} . Par exemple $\text{Vect}(2, 3) = \{(2x, 3x), x \in \mathbb{R}\}$. Si on représente cet ensemble dans \mathbb{R}^2 on obtient une droite passant par l'origine.

Enfin $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y - z = 0\}$ est également un sous-espace vectoriel.

L'axiome de stabilité par combinaisons linéaires de deux vecteurs pour un sous-espace vectoriel équivaut en fait à une condition apparemment plus forte :

Lemme 2.6 (stabilité d'un sous-espace vectoriel par combinaisons linéaires quelconques). Soit E un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . Alors E est stable par combinaisons linéaires d'une suite finie quelconque de vecteurs, i.e. : si ℓ est un entier, $\ell \geq 1$, et si u_1, \dots, u_ℓ sont dans E alors toute combinaison linéaire de u_1, \dots, u_ℓ est dans E .

Démonstration. On raisonne par récurrence sur l'entier ℓ .

Pour $\ell = 1$ il nous faut démontrer que pour tout vecteur u et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\lambda u \in E$. Posons $v = u$ et $\mu = 0$. D'une part la combinaison linéaire $\lambda u + \mu v$ est dans E puisque E est un sous-espace vectoriel, et d'autre part elle vaut λu .

Remarquons que pour $\ell = 2$ la propriété à démontrer est vraie puisque c'est justement le deuxième axiome des sous-espaces vectoriels.

Ensuite pour $\ell > 1$ quelconque supposons avoir déjà montré que toute combinaison linéaire de $\ell - 1$ vecteurs de E est dans E . On peut alors découper une combinaison linéaire de ℓ vecteurs u_1, \dots, u_ℓ de E en deux morceaux :

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{\ell-1} u_{\ell-1} + \lambda_\ell u_\ell = (\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{\ell-1} u_{\ell-1}) + \lambda_\ell u_\ell = u + \lambda_\ell u_\ell$$

où l'on a posé $u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{\ell-1} u_{\ell-1}$. Par récurrence on sait déjà que $u \in E$. Alors $u + \lambda_\ell u_\ell$ est dans E comme combinaison linéaire de deux vecteurs de E (le coefficient de u est 1, celui de u_ℓ est λ_ℓ). Et pour finir $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{\ell-1} u_{\ell-1} + \lambda_\ell u_\ell \in E$. \square

Corollaire 2.7 (Vect est le plus petit qui contient). *Soit (f_1, \dots, f_k) une suite de vecteurs de \mathbb{R}^n et posons $E = \text{Vect}(f_1, \dots, f_k)$. Alors E est un sous-espace vectoriel qui contient chaque vecteur f_1, \dots, f_k . De plus si un sous-espace vectoriel F de \mathbb{R}^n contient chaque vecteur f_1, \dots, f_k , alors $E \subset F$.*

Autrement dit $\text{Vect}(f_1, \dots, f_k)$ est le plus petit sous-espace vectoriel qui contient f_1, \dots, f_k .

Démonstration. En effet si F est un sous-espace vectoriel qui contient f_1, \dots, f_k alors d'après le Lemme 2.6 on sait que toute combinaison linéaire de (f_1, \dots, f_k) est dans F . Ceci signifie que chaque vecteur de E est dans F , autrement dit que $E \subset F$. \square

Corollaire 2.8. *Soit E le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n engendré par une suite de vecteurs (f_1, \dots, f_k) . Supposons que E contienne des vecteurs u_1, \dots, u_ℓ . Alors E contient toutes les combinaisons linéaires de u_1, \dots, u_ℓ . En d'autres termes :*

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_\ell) \subset \text{Vect}(f_1, \dots, f_k)$$

Comme application directe de ce corollaire :

Lemme 2.9 ("Vect" est croissant). *Soit \mathcal{G} une suite finie de vecteurs de \mathbb{R}^n et soit \mathcal{F} une suite extraite de \mathcal{G} (autrement dit \mathcal{F} s'obtient en conservant certains vecteurs de \mathcal{G} , et en rejetant certains autres vecteurs). Alors :*

$$\text{Vect}(\mathcal{F}) \subset \text{Vect}(\mathcal{G})$$

Démonstration. En effet le sous-espace vectoriel $E = \text{Vect}(\mathcal{G})$ contient chaque vecteur de \mathcal{G} , donc chaque vecteur de \mathcal{F} . Alors d'après le Corollaire 2.8 on a bien $\text{Vect}(\mathcal{F}) \subset E$. \square

En particulier :

Corollaire 2.10. *Toute suite de vecteurs d'un sous-espace vectoriel $E \subset \mathbb{R}^n$ qui contient une suite génératrice de E est elle-même une suite génératrice de E .*

Voici aussi une méthode pour prouver qu'une suite engendre \mathbb{R}^n :

Lemme 2.11 (critère d'engendrement). *Soit (f_1, \dots, f_k) une suite de vecteurs de \mathbb{R}^n . Notons comme d'habitude (e_1, \dots, e_n) les vecteurs $e_1 = (1, 0, \dots, 0, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$. Alors (f_1, \dots, f_k) engendrent \mathbb{R}^n si et seulement si chaque vecteur e_i est combinaison linéaire de la suite de vecteurs (f_1, \dots, f_k) .*

Démonstration. Si (f_1, \dots, f_k) engendre \mathbb{R}^n tous les vecteurs de \mathbb{R}^n sont combinaisons linéaires de (f_1, \dots, f_k) donc en particulier les vecteurs e_i .

Réciproquement si chaque e_i est dans $\text{Vect}(f_1, \dots, f_k)$, alors d'après le Corollaire 2.8 on a

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) \subset \text{Vect}(f_1, \dots, f_k)$$

autrement dit $\mathbb{R}^n \subset \text{Vect}(f_1, \dots, f_k)$. Comme de toute façon on a toujours $\text{Vect}(f_1, \dots, f_k) \subset \mathbb{R}^n$ on en déduit l'égalité $\text{Vect}(f_1, \dots, f_k) = \mathbb{R}^n$. \square

Lemme 2.12 (une autre caractérisation des sous-espaces vectoriels). *Un ensemble E de vecteurs de \mathbb{R}^n est un sous-espace vectoriel si et seulement si :*

- (1) (passe par $0_{\mathbb{R}^n}$) $0_{\mathbb{R}^n} \in E$;
- (2) (stabilité par somme) Pour tout $u, v \in E$ on a $u + v \in E$;
- (3) (stabilité par multiplication par un réel) Pour tout $u \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\lambda u \in E$.

Démonstration. Si E est stable par combinaison linéaire alors il est stable par somme et par multiplication par un réel (car ce sont des cas particuliers de combinaisons linéaires).

Réciproquement supposons E stable par somme et par multiplication par un réel, et vérifions que E est stable par combinaison linéaire. Soit donc $u, v \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. D'abord comme E est stable par multiplication par un réel les vecteurs $u' = \lambda u$ et $v' = \mu v$ sont dans E . Ensuite comme E est stable par somme $u' + v'$ est dans E . Ceci signifie exactement que $\lambda u + \mu v \in E$. \square

3. SUITES LIBRES.

Etant donné une suite (f_1, \dots, f_k) de vecteurs de \mathbb{R}^n , on a déjà remarqué qu'il est toujours possible de construire $0_{\mathbb{R}^n}$ comme combinaison linéaire de (f_1, \dots, f_k) : il suffit de choisir tous les coefficients de la combinaison linéaire égaux à 0. On peut se demander s'il existe un choix différents de coefficients $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ tels que $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_k f_k = 0_{\mathbb{R}^n}$: c'est ce qui amène aux notions de suite libre ou liée.

Définition 3.1 (suite libre, suite liée). Une suite (f_1, \dots, f_k) de vecteurs de \mathbb{R}^n est dite *libre* si les seuls coefficients $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ tels que $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_k f_k = (0, \dots, 0)$ sont $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_k = 0$. Une suite (f_1, \dots, f_k) qui n'est pas libre est dite *liée* : par définition il existe donc des coefficients réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ qui ne sont pas tous nuls et tels que $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_k f_k = (0, \dots, 0)$ (une telle relation s'appelle une relation de dépendance linéaire).

Par convention la suite vide $()$ est libre.

Ainsi les suites libres sont celles pour lesquelles la réponse au problème (2) (avec $u = 0_{\mathbb{R}^n}$) est : il y a une et une seule façon de fabriquer $0_{\mathbb{R}^n}$.

La preuve directe qu'une suite (f_1, \dots, f_k) est libre consiste à résoudre l'équation vectorielle $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_k f_k = (0, \dots, 0)$, aux inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Elle commence donc par :

“Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ des réels tels que $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_k f_k = (0, \dots, 0)$, montrons que nécessairement $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$...”

Il existe cependant des arguments plus élaborés (utilisant la dimension) qui permettent de montrer qu'une suite est libre, sans revenir à la définition.

Exemple 3.2.

Comme on l'a déjà remarqué la suite (e_1, e_2, \dots, e_n) est libre.

Autre exemple : la suite $(f_1 = (2, 0), f_2 = (-1, 5))$ est libre dans \mathbb{R}^2 . En effet soit λ_1, λ_2 deux réels tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = (0, 0)$: montrons que nécessairement $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Or $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = (2\lambda_1 - \lambda_2, 5\lambda_2)$, donc si la combinaison linéaire est nulle alors $\lambda_2 = 0$, puis également $\lambda_1 = 0$.

Mais la suite (f_1) avec $f_1 = 0_{\mathbb{R}^n}$ n'est pas libre! En effet en prenant $\lambda_1 = 1$, donc $\lambda_1 \neq 0$, on a quand même $\lambda_1 f_1 = 0_{\mathbb{R}^n}$ - on a vérifié la définition d'une suite liée.

Plus généralement :

Lemme 3.3. *Si l'un des termes f_i d'une suite (f_1, f_2, \dots, f_k) vérifie $f_i = 0_{\mathbb{R}^n}$, alors la suite est liée.*

Démonstration. Il suffit de prendre des coefficients λ_j nuls, sauf λ_i (par exemple $\lambda_i = 1$) : alors $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_k f_k = 0_{\mathbb{R}^n}$ et pourtant tous les λ_j ne sont pas nuls (à cause de λ_i). □

Lemme 3.4. *Toute suite qui est extraite d'une suite libre est elle-même libre. Ou encore : toute suite qui contient une sous-suite liée est liée.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{S} = (f_1, f_2, \dots, f_k)$ soit une suite libre. Soit \mathcal{S}' une suite extraite de \mathcal{S} .

Supposons qu'une certaine combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{S}' donne $0_{\mathbb{R}^n}$. Nous avons donc un coefficient λ'_j pour chaque vecteur f'_j de \mathcal{S}' , et chaque vecteur f'_j apparaît dans la suite \mathcal{S} : donc nous avons un coefficient déjà défini pour les vecteurs de \mathcal{S} qui apparaissent dans \mathcal{S}' . Pour les vecteurs de \mathcal{S} qui n'apparaissent pas dans la sous-suite \mathcal{S}' prenons le coefficient nul. Alors la combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{S} correspondant à ces choix de coefficients est nulle. Comme \mathcal{S} est libre, tous les coefficients doivent être nuls, donc chaque coefficient λ'_j est nul. □

L'intérêt des suites libres tient à la propriété suivante :

Proposition 3.5 (unicité de l'écriture des vecteurs engendrés par une suite libre).

Soit (f_1, \dots, f_k) une suite libre. Si $u \in \text{Vect}(f_1, \dots, f_k)$ alors il existe une unique suite $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ de réels tels que $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_k f_k = u$.

Autrement dit les suites libres sont celles pour lesquelles la réponse au problème (2) est : on peut fabriquer chaque vecteur d'au plus une façon.

4. PARTIES GÉNÉRATRICES, PARTIES LIBRES.

Nous avons défini "génératrice" et "libre" pour des suites de vecteurs, c'est à dire en tenant compte de l'ordre de ces vecteurs. En fait l'ordre ne compte pas.

Lemme 4.1 ("vect" est indépendant de l'ordre).

Soit A un ensemble (non vide) de k vecteurs de \mathbb{R}^n . Soit (f_1, f_2, \dots, f_k) et $(f'_1, f'_2, \dots, f'_k)$ deux numérotations de A (donc ce sont deux suites de vecteurs qui prennent les mêmes valeurs, mais dans des ordres différents).

Alors $\text{Vect}(f_1, \dots, f_k) = \text{Vect}(f'_1, \dots, f'_k)$. On notera $\text{Vect}(A)$ ce sous-espace vectoriel, appelé le sous-espace vectoriel engendré par la partie A . Si $E = \text{Vect}(A)$ on dit encore que A est une partie génératrice de E .

Pour simplifier, lorsque $A = \{u\}$, on notera $\text{Vect}(u)$ au lieu de $\text{Vect}(\{u\})$...

Démonstration. On sait que $\text{Vect}(f_1, \dots, f_k)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de la suite (f_1, \dots, f_k) . Mais toute combinaison linéaire de (f_1, \dots, f_k) est également une combinaison linéaire de $(f'_1, f'_2, \dots, f'_k)$ (et réciproquement), puisque les deux suites de vecteurs prennent les mêmes valeurs, simplement dans des ordres différents. Donc $\text{Vect}(f_1, \dots, f_k) = \text{Vect}(f'_1, \dots, f'_k)$.

(Par exemple $\text{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4) = \text{Vect}(f'_1 = f_2, f'_2 = f_4, f'_3 = f_1, f'_4 = f_3)$ car chaque combinaison linéaire $af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4$ correspond à $af'_3 + bf'_1 + cf'_4 + df'_2 = bf'_1 + df'_2 + af'_3 + cf'_4$, une combinaison linéaire de f'_1, f'_2, f'_3, f'_4 .)

□

Comme conséquence directe du Corollaire 2.7 nous obtenons :

Proposition 4.2. *Soit A une partie finie (non vide) de \mathbb{R}^n . Soit $E = \text{Vect}(A)$ le sous-espace vectoriel engendré. Alors E est le plus petit sous-espace vectoriel contenant A - ce qui signifie que E est contenu dans tout sous-espace vectoriel contenant A .*

Ceci justifie la **convention** suivante : pour $A = \emptyset$ on pose $\text{Vect}(A) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ (c'est bien le plus petit sous-espace vectoriel contenant A ...).

Et donc :

Corollaire 4.3 (Vect est croissant). *Soit A, B deux parties finies de \mathbb{R}^n avec $A \subset B$. Alors $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$.*

Par exemple pour toute partie B contenant un vecteur donné u on aura $\text{Vect}(u) \subset \text{Vect}(B)$, autrement dit $\text{Vect}(B)$ contient $\lambda u, \lambda \in \mathbb{R}$ quelconque.

Lemme 4.4 ("libre" est indépendant de l'ordre).

Soit A un ensemble (non vide) de k vecteurs de \mathbb{R}^n . Soit (f_1, f_2, \dots, f_k) et $(f'_1, f'_2, \dots, f'_k)$ deux numérotations de A .

Alors (f_1, f_2, \dots, f_k) est libre ssi $(f'_1, f'_2, \dots, f'_k)$ est libre. On dira dans ce cas que la partie A est libre ou linéairement indépendante. Dans le cas contraire on dira qu'elle est liée (ou linéairement dépendante).

Démonstration. Supposons $(f'_1, f'_2, \dots, f'_k)$ est liée : alors une certaine combinaison linéaire à coefficients non tous nuls de la suite $(f'_1, f'_2, \dots, f'_k)$ donne $0_{\mathbb{R}^n}$. Comme (f_1, f_2, \dots, f_k) n'est qu'une permutation de $(f'_1, f'_2, \dots, f'_k)$ on en déduit qu'il y a aussi une certaine combinaison linéaire à coefficients non tous nuls de la suite (f_1, f_2, \dots, f_k) qui donne $0_{\mathbb{R}^n}$, donc (f_1, f_2, \dots, f_k) est liée. On a donc montré (par contraposition) que si (f_1, f_2, \dots, f_k) est libre alors $(f'_1, f'_2, \dots, f'_k)$ est libre. Par symétrie on a aussi l'implication dans l'autre sens.

Sur un exemple : supposons $k = 3$, $f'_1 = f_2, f'_2 = f_3, f'_3 = f_1$ et $f'_1 + 2f'_2 + 4f'_3 = 0_{\mathbb{R}^n}$, alors en substituant : $f_2 + 2f_3 + 4f_1 = 0_{\mathbb{R}^n}$, puis en permutant : $4f_1 + f_2 + 2f_3 = 0_{\mathbb{R}^n}$. Donc une relation de dépendance linéaire entre f'_1, f'_2 et f'_3 donne une relation de dépendance linéaire entre f_1, f_2 et f_3 .

□

On déduit alors immédiatement du Lemme 3.4 le résultat suivant :

Corollaire 4.5. *Soit A, B deux parties finies de \mathbb{R}^n avec $A \subset B$. Si B est libre alors A est libre.*

5. BASES ET COORDONNÉES DANS UNE BASE.

Définition 5.1 (bases). Soit (u_1, \dots, u_k) une suite de vecteurs de \mathbb{R}^n . On dit que (u_1, \dots, u_k) est une *base* de \mathbb{R}^n si elle est à la fois libre et génératrice de \mathbb{R}^n .

Plus généralement soit $E \subset \mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel et soit (u_1, \dots, u_k) une suite de vecteurs de \mathbb{R}^n . On dit que (u_1, \dots, u_k) est une *base de E* si elle est libre et si elle engendre E .

Exemple 5.2. Comme on l'a vu, (e_1, e_2, \dots, e_n) est génératrice dans \mathbb{R}^n , et elle est libre. C'est donc une base de \mathbb{R}^n , appelée *base canonique*.

Une base de \mathbb{R}^2 (pas très canhonique) : (u, v) avec $u = (2, 3), v = (1, 2)$. Montrons générateur (en appliquant le critère de la dernière fois) . On a $2u - 3v = (1, 0)$, donc $e_1 \in \text{Vect}(u, v)$. Et $2v - u = e_2$, donc également $e_2 \in \text{Vect}(u, v)$. Comme $\text{Vect}(u, v)$ contient e_1, e_2 on a $\text{Vect}(u, v) = \mathbb{R}^2$, donc (u, v) est génératrice.

Maintenant vérifions que (u, v) est libre : soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $(E_0)\lambda u + \mu v = 0_{\mathbb{R}^n}$. L'équation vectorielle (E_0) équivaut à un système d'équations sur les composantes :

$$(S) \begin{cases} 2\lambda + \mu & = 0 \\ 3\lambda + 2\mu & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \frac{1}{2}\mu & = 0 \quad L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ 3\lambda + 2\mu & = 0 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} \lambda + \frac{1}{2}\mu & = 0 \\ \frac{1}{2}\mu & = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \end{cases} \iff \mu = \lambda = 0$$

Donc la seule solution de $\lambda u + \mu v = 0_{\mathbb{R}^n}$ est $\lambda = \mu = 0$, et la suite (u, v) est libre.

Un autre exemple. Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y - z = 0\}$. Alors $E = \text{Vect}((2, -1, 0), (1, 0, 1))$, et $(2, -1, 0), (1, 0, 1)$ est clairement libre. Donc c'est une base de E .

Proposition 5.3 (coordonnées dans une base). *Soit E un sous-espace vectoriel, et soit (f_1, \dots, f_d) une base de E . Si $u \in E$ alors il existe une unique suite $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d)$ de réels tels que $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_d f_d = u$.*

Les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$ s'appellent les *coordonnées du vecteur u ($\in E$) dans la base (f_1, \dots, f_d)* . On parlera de la première coordonnée, de la i -ème coordonnée etc...

Démonstration. L'existence vient de ce que la suite est génératrice. L'unicité vient de ce qu'elle est libre. \square

Remarque 5.4. Soit \mathcal{B} une base d'un sous-espace vectoriel E . Alors deux vecteurs u, u' de E sont égaux ssi leurs coordonnées dans \mathcal{B} sont identiques.

Attention, quand on change de base, on change de coordonnées!

Par exemple **l'ordre des vecteurs d'une base compte pour bien définir la suite des coordonnées**. Ainsi les deux bases (e_1, e_2) et (e_2, e_1) de \mathbb{R}^2 sont différentes et les coordonnées d'un vecteur $u = (x, y)$ n'arrivent pas dans le même ordre dans les deux bases : les coordonnées dans la première base (qui est la base canonique) sont (x, y) , tandis que les coordonnées dans la deuxième base sont (y, x) .

Exemple 5.5. (coordonnées dans la base canonique) Les coordonnées de $u = (x_1, \dots, x_n)$ dans la base canonique (e_1, \dots, e_n) sont précisément les composantes (x_1, \dots, x_n) , puisque $u = x_1(1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(0, \dots, 0, 1)$.

Autre exemple : $\mathcal{B} = ((2, 1), (1, -1))$ est une base de \mathbb{R}^2 - mais pas du tout la base canonique. Quelles sont les coordonnées de $(1, 0)$ dans cette base ? On cherche donc les deux réels x et y tels que $(1, 0) = x(2, 1) + y(1, -1)$. Or cette équation entre vecteur de \mathbb{R}^2 est équivalente à un système de deux équations linéaires, qu'on résout :

$$(S) \begin{cases} 2x + y & = 1 \\ x - y & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y & = 0 \\ 2x + y & = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y & = 0 \\ 3y & = 1 \end{cases} \iff x = y = \frac{1}{3}$$

Les coordonnées de $(1, 0)$ dans \mathcal{B} sont donc $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Proposition 5.6 (changement de base I). *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel de dimension d , et soient $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_d), \mathcal{B}' = (u'_1, \dots, u'_d)$ deux bases de E . Pour tout vecteur $u \in E$ on note (y_1, \dots, y_d) les coordonnées de u dans \mathcal{B} et (y'_1, \dots, y'_d) les coordonnées de u dans \mathcal{B}' (c'est le même vecteur, mais il est vu différemment par les deux bases : une base de E c'est une manière de regarder les vecteurs de E).*

Alors pour exprimer (y'_1, \dots, y'_d) en fonction de (y_1, \dots, y_d) (donc (y_1, \dots, y_d) sont donnés, et (y'_1, \dots, y'_d) sont inconnues), on commence par traduire composante par composante l'équation vectorielle $y'_1 u'_1 + \dots + y'_d u'_d = y_1 u_1 + \dots + y_d u_d$ en un système de n équations (aux inconnues (y'_1, \dots, y'_d) , et de second membre fonction de y_1, \dots, y_d). Puis on résout ce système.

ATTENTION : pour le moment nous ne connaissons que la définition des bases, mais nous ne connaissons aucune autre propriété, et n'avons pas de procédé pour fabriquer une base d'un sous-espace vectoriel E , même lorsque $E = \text{Vect}(f_1, \dots, f_k)$! C'est le but du chapitre suivant.

6. L'ALGORITHME DU RANG.

6.1. Suites libres et Vect.

Quand dans une suite (f_1, \dots, f_k) il y a une répétition, $f_i = f_j$, alors d'une part en retirant f_j on obtient une suite qui engendre le même sous-espace vectoriel, et d'autre part la suite (f_1, \dots, f_k) n'est jamais libre. Cette remarque se généralise :

Lemme 6.1 (ajout d'un vecteur à une suite libre). *Soit d'une part (u_1, \dots, u_k) une suite de vecteurs de \mathbb{R}^n , et soit d'autre part $u \in \mathbb{R}^n$ un vecteur.*

- (1) *Si $u \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ alors (u_1, \dots, u_k, u) est liée.*
- (2) *La suite (u_1, \dots, u_k, u) est libre si et seulement si (u_1, \dots, u_k) est libre et de plus $u \notin \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$.*

Corollaire 6.2 (critère de liberté). *Une suite (u_1, u_2, \dots, u_k) de vecteurs de \mathbb{R}^n est libre ssi : $u_1 \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, $u_2 \notin \text{Vect}(u_1)$, $u_3 \notin \text{Vect}(u_1, u_2)$, ... , et $u_k \notin \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_{k-1})$*

Démonstration. \Rightarrow Vérifions que si la suite est libre alors $u_1 \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, $u_2 \notin \text{Vect}(u_1)$, $u_3 \notin \text{Vect}(u_1, u_2)$, ... , et $u_k \notin \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_{k-1})$. Cela revient à montrer la contraposée : si $u_1 = 0_{\mathbb{R}^n}$, ou bien $u_2 \in \text{Vect}(u_1)$, ou bien $u_3 \in \text{Vect}(u_1, u_2)$, ... , ou bien $u_k \in \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_{k-1})$, alors la suite est liée.

Or si $u_1 = 0$ la suite contient le vecteur nul donc est liée. Et si $u_i \in \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_{i-1})$ alors la suite (u_1, u_2, \dots, u_i) est liée d'après le Lemme 6.1. Donc la suite contient une suite liée, et elle est liée.

\Leftarrow

$u_1 \neq 0$ donc (u_1) est libre. En effet l'une des composantes x_i de $u_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est non nulle, donc l'équation $\lambda u = 0_{\mathbb{R}^n}$ implique que $\lambda x_i = 0$, donc que $\lambda = 0$ puisque $x_i \neq 0$.

$u_2 \notin \text{Vect}(u_1)$ et (u_1) est libre donc (u_1, u_2) est libre d'après le lemme 6.1 ;

$u_3 \notin \text{Vect}(u_1, u_2)$ et (u_1, u_2) est libre donc (u_1, u_2, u_3) est libre (toujours d'après le lemme 6.1) ;

... etc ...

finalement $u_k \notin \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_{k-1})$ et (u_1, \dots, u_{k-1}) est libre, donc (u_1, u_2, \dots, u_k) est libre (toujours d'après le lemme 6.1). □

6.2. Extraire une suite libre en conservant le même sous-espace vectoriel engendré.

Par convention la suite vide $()$ (zéro vecteur de \mathbb{R}^n) engendre le sous-espace $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Et par convention elle est libre. Donc c'est une suite libre et génératrice de $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$: c'est une base de $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Théorème 6.3 (algorithme du rang).

Soit (u_1, u_2, \dots, u_k) une suite de vecteurs de \mathbb{R}^n . On considère la sous-suite (v_1, v_2, \dots, v_m) définie de la façon suivante :

v_1 est le premier vecteur non nul de la suite (u_1, u_2, \dots, u_k) ;
 v_2 est le premier vecteur de la suite (u_1, u_2, \dots, u_k) qui n'est pas dans $\text{Vect}(v_1)$;
 v_3 est le premier vecteur de la suite (u_1, u_2, \dots, u_k) qui n'est pas dans $\text{Vect}(v_1, v_2)$;
 v_4 est le premier vecteur de la suite (u_1, u_2, \dots, u_k) qui n'est pas dans $\text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$;
 ... etc ...

Alors la suite extraite (v_1, v_2, \dots, v_m) est libre, et $\text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_m) = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k)$.

Exemple 6.4. Pour $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7) = ((0, 0, 0), (1, 2, 0), (2, 4, 0), (0, 2, 1), (1, -2, -2), (1, 0, 1), (1, 0, 0))$ on trouve $(v_1(= u_2), v_2(= u_4), v_3(= u_6)) = ((1, 2, 0), (0, 2, 1), (1, 0, 1))$.

Démonstration. **La suite (v_1, v_2, \dots, v_m) est libre :**

une application directe du critère de liberté (Corollaire 6.2).

La suite (v_1, v_2, \dots, v_m) engendre $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k)$:

Pour démontrer cela on montre d'abord $F \subset E$, puis $E \subset F$, où l'on a posé $E = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k)$ et $F = \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_m)$.

$F \subset E$: car E est le sous-espace engendré par (u_1, \dots, u_k) , donc il contient tous les vecteurs u_i et en particulier il contient les vecteurs (v_1, v_2, \dots, v_m) . Comme F est le plus petit sous-espace vectoriel contenant (v_1, v_2, \dots, v_m) on a bien $F \subset E$.

$E \subset F$: commençons par montrer que chaque u_i est dans F . Par l'absurde : si un u_i n'était pas dans F , alors le premier de ces u_i donnerait un vecteur v_{m+1} : donc la construction de la suite (v_1, v_2, \dots) n'aurait pas été achevée. Absurde.

Ensuite on conclut comme ci-dessus F contient chaque u_i , donc contient $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = E$. □

Remarque 6.5 (l'algorithme du rang extrait une base). Notons que lorsque $E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ l'algorithme du rang appliqué à (u_1, \dots, u_k) fournit une base de E , puisque le résultat est une suite libre qui engendre le même sous-espace vectoriel E .

7. DIMENSION.

7.1. Définition de la dimension.

Théorème 7.1 (théorème de la dimension). *Soit $E = \text{Vect}(f_1, \dots, f_k)$ un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n (donné par une partie génératrice).*

Alors E admet une base de longueur $\leq k$. De plus, toutes les bases de E sont des suites de même longueur d (la longueur d d'une suite est le nombre de ses termes).

Le nombre d s'appelle la *dimension* de E et est notée $\dim E$: c'est le nombre le plus important du cours !

preuve du théorème de la dimension. D'abord, quitte à appliquer l'algorithme d'extraction à (f_1, \dots, f_k) , on peut supposer que $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_k)$ est une base de E (qui en admet donc bien une au moins).

Soit (g_1, \dots, g_ℓ) une autre base de E . Pour montrer que $k = \ell$, il suffit par symétrie de montrer que $\ell \leq k$.

On rajoute le premier vecteur de la base g_1 au début de \mathcal{B} : soit $\mathcal{F}_1 = (g_1, \mathcal{B})$ la suite obtenue. Puis on applique l'algorithme d'extraction d'une suite libre, soit \mathcal{B}_1 la suite obtenue.

Sans même rentrer dans le détail de ce que fait l'algorithme à la suite \mathcal{B} , d'après les propriétés générales de l'algorithme d'extraction, on remarque que \mathcal{B}_1 est encore une base de E , car \mathcal{B} en était une. On peut être plus précis : comme \mathcal{B} est génératrice g_1 est dans l'un des sous-espaces vectoriels engendrés par une sous-suite (f_1, f_2, \dots, f_i) . Soit i le plus petit indice de $\{1, \dots, k\}$ tel que $e_n \in \text{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_i)$.

Alors l'algorithme conserve tous les vecteurs f_1, \dots, f_{i-1} , mais rejette f_i . En particulier la longueur de \mathcal{B}_1 est au plus égale à celle de \mathcal{B} .

On recommence la transformation précédente en considérant maintenant $\mathcal{F}_2 = (g_2, \mathcal{B}_1)$, puis en lui appliquant l'algorithme d'extraction pour trouver \mathcal{B}_2 , à nouveau base de E . On s'aperçoit que le (ou les) vecteur(s) rejeté est (sont) à la fin de \mathcal{B}_1 , dans la partie qui provient de la suite de départ.

En continuant ainsi jusqu'à g_ℓ on voit qu'on a pu rejeter successivement ℓ vecteurs de \mathcal{B} , donc \mathcal{B} avait au moins ℓ vecteurs. D'où $\ell \leq k$. □

On pourrait montrer directement qu'à chaque étape l'algorithme ne rejette qu'un seul vecteur.

Nous obtenons la conséquence suivante du théorème de la dimension :

Corollaire 7.2 (bases de \mathbb{R}^n). *Toutes les bases de \mathbb{R}^n sont des suites de longueurs n . La dimension de \mathbb{R}^n est donc n ($\dim(\mathbb{R}^n) = n$).*

Exemple 7.3.

Le seul sous-espace de dimension 0, c'est $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Pour $u \neq 0$ le sous-espace $\text{Vect}(u)$ admet (u) pour base, donc il est de dimension 1. Réciproquement si E est un sous-espace vectoriel de dimension 1 et admet pour base (f) , alors comme (f) est génératrice $E = \text{Vect}(f)$ et comme (f) est libre $f \neq 0$.

Bref les sous-espaces de dimension 1 sont exactement les ensembles de vecteurs de la forme $E = \{\lambda u, \lambda \in \mathbb{R}\}$ pour u un certain vecteur non nul.

Un sous-espace de dimension 1 s'appelle une *droite*.

D'après le critère des suites libres, une suite (u, v) est libre ssi $u \neq 0$ et v non proportionnel à u (on dit aussi v non *colinéaire* à u). Alors le sous-espace $\text{Vect}(u, v)$ admet (u, v) pour base, donc il est de dimension 2. Réciproquement si E est un sous-espace vectoriel de dimension 2 et admet pour base (f, g) , alors comme (f, g) est génératrice $E = \text{Vect}(f, g)$ et comme (f, g) est libre on a $f \neq 0$ et g non proportionnel à f .

Bref les sous-espaces de dimension 2 sont exactement les ensembles de vecteurs de la forme $E = \{\lambda u + \mu v, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$ pour (u, v) une certaine suite libre.

Un sous-espace de dimension 2 s'appelle une *plan*.

7.2. Longueur des suites libres ou génératrices.

Définition 7.4 (rang d'une suite de vecteurs). Le *rang* d'une suite de vecteurs est la dimension du sous-espace vectoriel que cette suite engendre.

Remarquons que l'algorithme du rang permet justement de déterminer le rang d'une suite de vecteurs.

Théorème 7.5 (théorème de la base incomplète). *Soit E le sous-espace vectoriel engendré par une suite (f_1, \dots, f_k) , et soit (u_1, \dots, u_r) une suite libre de E . Alors $r \leq \dim(E)$ et il existe une suite (u_{r+1}, \dots, u_d) (extraite de (f_1, \dots, f_k) si l'on veut!) telle que $(u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_d)$ est une base de E .*

On a donc complété la suite libre (u_1, \dots, u_r) en une base de E .

Démonstration. On considère la suite obtenue en mettant bout à bout la suite libre puis la suite génératrice : $(u_1, \dots, u_r, f_1, \dots, f_k)$. Comme cette suite de E contient la suite génératrice (f_1, \dots, f_k) , elle est elle-même génératrice. On lui applique l'algorithme du rang : le résultat est donc une base de E .

Mais comme la suite à laquelle s'applique l'algorithme du rang commence par la suite libre (u_1, \dots, u_r) la procédure conserve (u_1, \dots, u_r) , et ensuite elle élimine certains des vecteurs de (f_1, \dots, f_k) . □

Les applications de ce théorème sont très nombreuses.

Proposition 7.6 (suites génératrices ou libres dans \mathbb{R}^n).

Toute suite génératrice de \mathbb{R}^n a au moins n éléments, toute suite libre de \mathbb{R}^n a au plus n éléments. Dans les deux cas si la suite a exactement n éléments alors c'est une base de \mathbb{R}^n .

Démonstration. On applique l'algorithme du rang à une suite génératrice de \mathbb{R}^n . Le résultat est une base de \mathbb{R}^n , donc possède exactement n éléments. D'autre part cette base est extraite de la suite de départ, qui est donc nécessairement de longueur $\geq n$. Si sa longueur est exactement n alors une suite extraite stricte n'a pas n éléments donc ne peut être une base de \mathbb{R}^n . Ainsi nécessairement l'algorithme du rang laisse inchangée une suite génératrice de longueur n - qui est donc une base de \mathbb{R}^n .

Si on a une suite libre (u_1, \dots, u_r) de \mathbb{R}^n on peut la compléter en une base $(u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_n)$ de \mathbb{R}^n par le Théorème de la base incomplète (Théorème 7.5). Il en résulte que $r \leq n$. Et si $r = n$ alors il n'y a pas eu de vecteurs à rajouter : donc (u_1, \dots, u_r) était déjà une base. \square

Proposition 7.7 (tout sous-espace vectoriel admet une base, donc une dimension). *Pour tout sous-espace vectoriel E de \mathbb{R}^n il existe une suite (f_1, \dots, f_k) de vecteur de E telle que $E = \text{Vect}(f_1, \dots, f_k)$. Donc tout sous-espace vectoriel admet une base et une dimension.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Supposons que pour tout entier $k \geq 1$, aucune suite (f_1, \dots, f_k) n'engendre E . Prenons d'abord $f_1 \in E$, avec f_1 non nul (possible sinon E serait engendré par le vecteur nul). Puisque E n'est pas engendré par un seul vecteur, il existe f_2 dans E mais non contenu dans $\text{Vect}(f_1)$. Alors (f_1, f_2) est libre d'après le corollaire 6.2. Mais il existe un vecteur f_3 de E non contenu dans $\text{Vect}(f_1, f_2)$.

En continuant ainsi on finit par trouver dans E une suite libre arbitrairement longue - par exemple de longueur $n + 1$. Mais c'est impossible puisque toutes les suites libres de \mathbb{R}^n sont de longueur $\leq n$. \square

Théorème 7.8 (suites génératrices ou libres en dimension d).

Soit E un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . Soit d la dimension de E .

Alors $d \leq n$. De plus :

- (1) *Une suite génératrice de E a au moins d éléments ; si elle a exactement d éléments alors c'est une base.*
- (2) *Une suite libre de E a au plus d éléments ; si elle a exactement d éléments alors c'est une base.*

Démonstration. L'inégalité $d \leq n$ vient de la base incomplète, le reste de l'argument est identique à celui déjà vu dans le cas particulier de $E = \mathbb{R}^n$. \square

Exemple 7.9. Pour savoir si une suite de 4 vecteurs est bien une base de \mathbb{R}^4 , il suffit de montrer qu'elle est génératrice - ou libre si l'on veut.

Une autre application de la base incomplète :

Corollaire 7.10 (la dimension est croissante). *Soit F, E des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n avec $F \subset E$. Alors $0 \leq \dim(F) \leq \dim(E) \leq n$.*

Proposition 7.11 (l'argument de dimension). *Soit F, E des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n avec $F \subset E$. Alors $F = E$ ssi $\dim(F) = \dim(E)$.*

démonstration simultanée du corollaire et de la proposition. Soit (u_1, \dots, u_r) une base de F . C'est donc une suite libre de E , que nous pouvons compléter en une base de E . Cela donne $\dim(F) \leq \dim(E)$.

Si de plus $\dim(F) = \dim(E)$ alors la base de E qui complète (u_1, \dots, u_r) ne contient pas d'autre vecteur que u_1, \dots, u_r . Donc pour finir (u_1, \dots, u_r) est une base de E , en particulier une partie génératrice de E : tout vecteur de E est combinaison linéaire de (u_1, \dots, u_r) , i.e. tout vecteur de E est dans F . Ceci montre $E \subset F$, et donc $E = F$. \square

Par exemple pour montrer qu'un sous-espace vectoriel E de \mathbb{R}^n est en fait égal à \mathbb{R}^n , il suffit de montrer qu'il est de dimension n . Ainsi la suite $((1, -1), (1, 2))$ est facilement libre (par le critère de liberté : premier vecteur non nul, et deuxième vecteur non multiple du premier), donc le sous-espace vectoriel engendré par ces deux vecteurs est \mathbb{R}^2 tout entier.

8. INTERSECTION ET SOMME DE DEUX SOUS-ESPACES VECTORIELS.

Exemple 8.1 (intersections). Dans le plan \mathbb{R}^2 soit $E = \text{Vect}(1, 1)$ et soit $F = \text{Vect}(1, 2)$. Alors E, F sont deux droites et $E \cap F$ est constitué des vecteurs (x, y) qui sont simultanément multiples de $(1, 1)$ et de $(1, 2)$. Est-il possible de trouver des coefficients de multiplication λ, μ tels que $(\lambda, \lambda) = (\mu, 2\mu)$? Il s'agit de résoudre le système $\lambda = \mu, \lambda = 2\mu$: la seule solution est $\lambda = \mu = 0$.

Dans l'espace \mathbb{R}^3 soit $E = \text{Vect}\{(1, 1, 1), (0, 1, 1)\}$ et soit $F = \text{Vect}\{(1, 2, 0), (0, 1, 0)\}$. Alors E, F sont deux plans et $E \cap F$ est constitué des vecteurs (x, y, z) qui peuvent s'écrire à la fois comme combinaison linéaire de $(1, 1, 1), (0, 1, 1)$, et aussi comme combinaison linéaire de $(1, 2, 0), (0, 1, 0)$. Est-il possible de trouver des coefficients réels λ_1, λ_2 et μ_1, μ_2 tels que

$$\lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(0, 1, 1) = \mu_1(1, 2, 0) + \mu_2(0, 1, 0) \quad (= \text{le vecteur } (x, y, z)) \quad ?$$

Il s'agit de résoudre le système

$$(S) \begin{cases} \lambda_1 & = \mu_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = 2\mu_1 + \mu_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 - \mu_1 & = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - 2\mu_1 - \mu_2 & = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 - \mu_1 & = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ 2\mu_1 + \mu_2 & = 0 \end{cases}$$

On obtient les solutions en fonction de λ_1 :

$$\text{Sol}(S) = \{(\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_1, -2\lambda_1), \lambda_1 \in \mathbb{R}\}$$

Donc les combinaisons linéaires $\lambda_1(1, 1, 1) - \lambda_1(0, 1, 1)$ et $\lambda_1(1, 2, 0) - 2\lambda_1(0, 1, 0)$ définissent des vecteurs égaux, dans l'intersection $E \cap F$, et réciproquement tout vecteur de cette intersection est de cette forme. Après simplification la combinaison linéaire donne en fait $\lambda_1(1, 0, 0)$.

Autrement dit l'intersection des deux plans E et F est la droite engendrée par $(1, 0, 0)$.

NB : nous verrons plus loin que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels se détermine bien en travaillant avec les systèmes d'équations cartésiennes.

Lemme 8.2. Soient E, F deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n . Alors leur intersection $E \cap F$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Démonstration. Posons $G = E \cap F$ et vérifions les axiomes d'un sous-espace vectoriel pour la partie G . D'abord G est une partie de \mathbb{R}^n : elle est constituée des vecteurs qui appartiennent simultanément à E et à F .

On a $0 \in E$ et $0 \in F$, donc $0 \in G = E \cap F$.

Supposons que $u, v \in G$ et que $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $u, v \in E$, donc comme E est un sous-espace vectoriel il est stable par combinaison linéaire, et donc $\lambda u + \mu v \in E$. Et on a aussi $u, v \in F$, donc comme F est un sous-espace vectoriel il est lui aussi stable par combinaison linéaire, et donc $\lambda u + \mu v \in F$. Finalement $\lambda u + \mu v \in E \cap F = G$. \square

Lemme 8.3. Soient E, F deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n . Alors $\dim(E \cap F) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$. Si par exemple $\dim(E \cap F) = \dim(E)$ alors en fait $E \subset F$.

Démonstration.

On a $E \cap F \subset E$. Or la dimension est croissante (d'après le Corollaire 7.10), donc $\dim(E \cap F) \leq \dim(E)$. De même $\dim(E \cap F) \leq \dim(F)$, de sorte que $\dim(E \cap F) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$.

Si $\dim(E \cap F) = \dim(E)$ alors, comme $E \cap F \subset E$, par l'argument de dimension (Proposition 7.11) on a $E \cap F = E$. Donc $E = E \cap F \subset F$. □

Définition 8.4. Soient E, F deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n . On appelle *somme de E et F* et on note $E + F$ l'ensemble de tous les vecteurs de la forme $u + v$, avec $u \in E$ et $v \in F$.

Lemme 8.5 (la somme est le plus petit sous-espace qui contient les deux sous-espaces).

Soient E, F deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n . Alors $E + F$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n qui contient E et F , et c'est le plus petit des sous-espaces vectoriels contenant à la fois E et F .

Démonstration. Posons $H = E + F$ et vérifions les axiomes d'un sous-espace vectoriel pour la partie H . D'abord H est une partie de \mathbb{R}^n : elle est constituée des sommes de vecteurs appartenant respectivement à E et à F .

On a $0 \in E$ et $0 \in F$, donc $0 = 0 + 0 \in H$.

Supposons que $u, u' \in H$ et que $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$. Comme $u \in E + F$, il existe des vecteurs $e \in E$ et $f \in F$ dont la somme donne $u : u = e + f$. De même comme $u' \in E + F$, il existe des vecteurs $e' \in E$ et $f' \in F$ dont la somme donne $u' : u' = e' + f'$. Alors par distributivité :

$$\lambda u + \lambda' u' = \lambda(e + f) + \lambda'(e' + f') = \lambda e + \lambda' e' + \lambda f + \lambda' f'$$

Comme E est un sous-espace vectoriel on a $\lambda e + \lambda' e' \in E$. Et de même $\lambda f + \lambda' f' \in F$. Finalement $\lambda u + \lambda' u'$ s'écrit comme somme de deux vecteurs, le premier dans E , le second dans F . Donc par définition $\lambda u + \lambda' u' \in E + F = H$.

Ainsi $E + F$ est bien un sous-espace vectoriel.

En prenant $u \in E$ quelconque et $v = 0 \in F$ on voit que $u + 0 = u \in E + F$ pour tout $u \in E$, donc $E \subset E + F$. De même $F \subset E + F$. Reste à vérifier que $E + F$ est le plus petit sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n contenant E et F .

Soit donc V un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n et supposons que $E \subset V, F \subset V$. Soit $u \in E$ et $v \in F$. Comme V est un sous-espace vectoriel contenant u et v il contient toute combinaison linéaire de u et v , en particulier $1.u + 1.v = u + v$. Donc V contient toutes les sommes $u + v$ (pour $u \in E, v \in F$). C'est dire que $E + F \subset V$. □

Exemple 8.6. Dans le plan \mathbb{R}^2 soit $E = \text{Vect}(1, 1)$ et soit $F = \text{Vect}(1, 2)$.

Par définition $u \in E \iff u = \lambda(1, 1)$ (pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$) et $v \in F \iff v = \mu(1, 2)$ (pour un certain $\mu \in \mathbb{R}$).

Donc $E + F$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $\lambda(1, 1) + \mu(1, 2)$ pour λ, μ des coefficients quelconques. Bref $E + F = \text{Vect}((1, 1), (1, 2))$. Or $((1, 1), (1, 2))$ est clairement libre, c'est donc une base de \mathbb{R}^2 - en particulier la suite $((1, 1), (1, 2))$ engendre \mathbb{R}^2 . Et $E + F = \mathbb{R}^2$ - le plan est somme de deux droites.

Dans \mathbb{R}^3 on considère la suite $(u = (0, 1, 2), v = (1, 0, 1), w = (1, 1, 1))$, puis on pose $E = \text{Vect}(u, v)$ et $F = \text{Vect}(w)$. Donc E est un plan et F est une droite. Alors $E + F$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $(\lambda u + \mu v) + (\nu w)$ pour λ, μ, ν des coefficients quelconques. Bref $E + F = \text{Vect}(u, v, w)$. En fait (u, v, w) est facilement génératrice. Donc $E + F = \text{Vect}(u, v, w) = \mathbb{R}^3$. L'espace est somme d'un plan et d'une droite.

Lemme 8.7 (partie génératrice d'une somme). *Lorsque $E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ et $F = \text{Vect}(v_1, \dots, v_\ell)$ sont deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n alors $E + F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_\ell)$.*

En particulier $\dim(E + F) \leq \dim(E) + \dim(F)$.

Démonstration. Soit $G = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_\ell)$. Montrer que $E + F = G$ revient à montrer les deux inclusions $E + F \subset G$ et $G \subset E + F$.

$E + F \subset G$: En effet G est un sous-espace vectoriel et contient par construction u_1, \dots, u_k , donc, par le Lemme 2.6, G contient $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = E$. De même G contient v_1, \dots, v_ℓ , donc G contient F . Ainsi G est un sous-espace vectoriel qui contient E et F , donc G contient $E + F$ par le Lemme 8.5.

$G \subset E + F$: En effet $E + F$ contient E , donc u_1, \dots, u_k . Et $E + F$ contient F , donc v_1, \dots, v_ℓ . Finalement $E + F$ est un sous-espace vectoriel qui contient $(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_\ell)$, donc $E + F$ contient aussi le sous-espace vectoriel engendré, c'est à dire G .

En particulier si on considère (u_1, \dots, u_k) une base de E et (v_1, \dots, v_ℓ) une base de F , on voit que $E + F$ admet une suite génératrice ayant $\dim(E) + \dim(F)$ éléments, d'où l'inégalité $\dim(E + F) \leq \dim(E) + \dim(F)$. □

Remarque 8.8. Ainsi les suites génératrices sont très bien adaptées pour décrire les sommes de sous-espaces vectoriels.

Voir plus loin la formule exacte de $\dim(E + F)$ (théorème 8.14).

Remarquer qu'il est beaucoup moins évident de donner une suite génératrice d'une intersection $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) \cap \text{Vect}(v_1, \dots, v_\ell)$! On peut s'en sortir avec les équations cartésiennes.

Lemme 8.9. *Soient E, F deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n . Si $E \cap F = \{0\}$ alors tout vecteur w de $E + F$ s'écrit d'une unique manière $w = u + v$, avec $u \in E$ et $v \in F$.*

Démonstration. Si on a deux écritures $w = u + v$ et $w = u' + v'$ avec $u, u' \in E$ et $v, v' \in F$, on obtient tout d'abord $u - u' = v' - v$. Ensuite $u - u'$ est dans E comme différence de deux vecteurs de E . De même $v' - v \in F$. Alors comme $u - u' = v' - v$ on en déduit que $u - u' \in E \cap F$. Et comme $E \cap F = \{0\}$ on obtient $u - u' = 0$, soit $u = u'$, puis $v' - v = 0$, donc $v' = v$. □

Définition 8.10. Soient E, F deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n . On dit que E et F sont *en somme directe* si $E \cap F = \{0\}$. Dans ce cas on note souvent la somme $E \oplus F$.

Exemple 8.11. Un plan est toujours somme directe de deux de ses droites (distinctes).

Définition 8.12. Soient E, F deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n . On dit que E et F sont *supplémentaires dans \mathbb{R}^n* lorsque $E \cap F = \{0\}$ et $E + F = \mathbb{R}^n$ - autrement dit $E \oplus F = \mathbb{R}^n$.

Exemple 8.13. Dans \mathbb{R}^3 le plan horizontal $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\}$ et la droite verticale $F = \{(a, a, a), a \in \mathbb{R}\}$ sont supplémentaires.

Théorème 8.14 (formule de la dimension). *Soient E, F deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n . Alors*

$$\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F)$$

En fait on obtient une base de $E + F$ en complétant une base de $E \cap F$ en une base de E , puis en une base de F , et en mettant les trois suites de vecteurs ensemble.

Plus précisément : soit $\mathcal{B}_0 = (w_1, \dots, w_i)$ une base de $E \cap F$, complétons \mathcal{B}_0 à l'aide de $\mathcal{B}_1 = (u_{i+1}, \dots, u_k)$ en une base $(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)$ de E , et complétons aussi \mathcal{B}_0 à l'aide de $\mathcal{B}_2 = (v_{i+1}, \dots, v_\ell)$ en une base $(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_2)$ de F . Alors $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_2)$ est une base de $E + F$.

Démonstration. Il s'agit de montrer la deuxième partie du théorème, qui entraîne facilement la première.

1) **La suite** $(u_{i+1}, \dots, u_k, w_1, \dots, w_i, v_{i+1}, \dots, v_\ell)$ **engendre** $E + F$.

En effet la suite $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_2)$ engendre le même sous-espace vectoriel que la suite où l'on répète \mathcal{B}_0 : $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_2)$. Or cette dernière suite s'obtient en mettant bout à bout de bases de E et de F . Donc elle engendre $E + F$ d'après le Lemme 8.7.

2) **La suite** $(u_{i+1}, \dots, u_k, w_1, \dots, w_i, v_{i+1}, \dots, v_\ell)$ **est libre**.

Considérons une combinaison linéaire nulle de $(u_{i+1}, \dots, u_k, w_1, \dots, w_i, v_{i+1}, \dots, v_\ell)$:

$$(1) \mu_{i+1}u_{i+1} + \dots + \mu_k u_k + \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_i w_i + \nu_{i+1}v_{i+1} + \dots + \nu_\ell v_\ell = 0$$

Posons $u = \mu_{i+1}u_{i+1} + \dots + \mu_k u_k + \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_i w_i$ et $v = -(\nu_{i+1}v_{i+1} + \dots + \nu_\ell v_\ell)$. Alors $u \in E$, $v \in F$ et $u = v$. Donc en fait $u \in E \cap F$ et on peut écrire u comme combinaison linéaire des vecteurs (w_1, \dots, w_i) :

$$u = \lambda'_1 w_1 + \dots + \lambda'_i w_i$$

En comparant les deux expressions de u on obtient

$$0 = \mu_{i+1}u_{i+1} + \dots + \mu_k u_k + (\lambda_1 - \lambda'_1)w_1 + \dots + (\lambda_i - \lambda'_i)w_i$$

Comme la suite $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_0)$ est libre on en déduit que tous les coefficients ci-dessus sont nuls. En particulier $\mu_{i+1} = \dots = \mu_k = 0$. En reportant dans (1) on trouve :

$$(2) \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_i w_i + \nu_{i+1}v_{i+1} + \dots + \nu_\ell v_\ell = 0$$

Et comme $(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_2)$ est libre on en déduit que les coefficients qui restent sont nuls, soit $\lambda_1 = \dots = \lambda_i = \nu_{i+1} = \dots = \nu_\ell = 0$.

Ceci prouve que la suite est libre.

Vérifions maintenant la formule de la dimension de $E + F$. La dimension de E est k , celle de F est ℓ , enfin celle de $E \cap F$ est i . Comme on a trouvé une base de $E + F$ on peut calculer $\dim(E + F)$. On obtient

$$\dim(E + F) = (k - i) + i + (\ell - i) = k + \ell - i = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F).$$

□

Remarque 8.15.

1) La formule ci-dessus est aussi une formule de la dimension de l'intersection :

$$\dim(E \cap F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E + F)$$

2) En particulier on voit que si $\dim(E) + \dim(F) > n$ alors nécessairement $\dim(E \cap F) > 0$, donc $E \cap F$ contient au moins un vecteur non nul. La dimension est comme une mesure de la place qu'occupe le sous-espace vectoriel : si deux sous-espaces vectoriels du même espace \mathbb{R}^n occupent trop de place, alors ils sont forcés d'avoir une partie en commun assez importante.

Ainsi deux plans de l'espace \mathbb{R}^2 doivent se couper au moins selon une droite !

Corollaire 8.16 (dimensions de deux supplémentaires). *Si deux sous-espaces vectoriels E, F sont supplémentaires dans \mathbb{R}^n alors $\dim(E) + \dim(F) = n$. Et on obtient une base de \mathbb{R}^n en concaténant une base de E avec une base de F .*

Théorème 8.17.

Soient E, F deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(1) E \oplus F = \mathbb{R}^n ;$$

- (2) $E \cap F = \{0\}$ et $\dim(E) + \dim(F) = n$;
 (3) $E + F = \mathbb{R}^n$ et $\dim(E) + \dim(F) = n$;
 (4) On obtient une base de \mathbb{R}^n en concaténant (en mettant bout à bout) une base de E avec une base de F .

Démonstration. (1) \Rightarrow (2), par la définition de supplémentaire et le corollaire 8.16. De même (1) \Rightarrow (3). En appliquant la deuxième partie de la formule de la dimension (Théorème 8.14) on voit que (1) \Rightarrow (4).

Montrons maintenant (2) \Rightarrow (1). On a déjà $E \cap F = \{0\}$, il suffit d'avoir $E + F = \mathbb{R}^n$. Or d'après le Théorème 8.14 on sait que $\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F)$, ce qui, sous les hypothèses de (2), donne : $\dim(E + F) = n$. Ainsi $E + F$ est un sous-espace de \mathbb{R}^n de dimension n , c'est donc que $E + F = \mathbb{R}^n$.

Montrons de la même manière (3) \Rightarrow (1). On a déjà $E + F = \mathbb{R}^n$, il suffit d'avoir $E \cap F = \{0\}$. Or d'après le Théorème 8.14 on sait que $\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F)$, ce qui, sous les hypothèses de (3), donne : $n = n - \dim(E \cap F)$. Ainsi $\dim(E \cap F) = 0$ donc $E \cap F = \{0\}$.

Reste à vérifier que si, quand on met des bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ de E et F bout à bout on obtient une base de \mathbb{R}^n , alors $E \oplus F = \mathbb{R}^n$.

Or $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ est toujours une suite génératrice de $E + F$. Si par hypothèse on obtient une base de \mathbb{R}^n , c'est donc que $E + F = \mathbb{R}^n$ et $\dim(E) + \dim(F) = n$. On a donc vérifié la condition (3), qui entraîne (1). □

Comme application directe de (4) \Rightarrow (1) dans le théorème ci-dessus nous avons :

Corollaire 8.18 (tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire).

Soit E un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n et soit (u_1, \dots, u_d) une base de E . Complétons cette base de E en une base $(u_1, \dots, u_d, u_{d+1}, \dots, u_n)$ de \mathbb{R}^n (par exemple avec le théorème de la base incomplète).

Alors $\text{Vect}(u_{d+1}, \dots, u_n)$ est un supplémentaire de E dans \mathbb{R}^n .

9. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS CARTÉSIENNES.

Autant Vect est adapté à l'étude des sommes de sous-espaces vectoriels, autant il est peu commode pour décrire les intersections. Mais on peut utiliser une autre description des sous-espaces vectoriels : les systèmes d'équations cartésiennes.

Proposition 9.1. Soit (S) un système linéaire homogène de p équations à n inconnues. Alors $E = \text{Sol}(S)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . De plus $\dim(E) \geq n - p$. On dit que (S) est un système d'équations cartésiennes de E .

Démonstration. Comme le système est homogène, 0 est solution donc $0 \in E$. Vérifions ensuite que toute combinaison linéaire de deux solutions est encore solution. Soient donc $u = (s_1, \dots, s_n)$ et $v = (t_1, \dots, t_n)$ deux solutions de (S) . Soient λ, μ deux réels. Alors

$$\lambda u + \mu v = (\lambda s_1 + \mu t_1, \dots, \lambda s_n + \mu t_n)$$

Et $\lambda u + \mu v \in E$ si et seulement si chacune de ses composantes vérifient la ligne correspondante du système (S) . Concentrons-nous sur la première ligne (les autres se traitent de la même façon), que nous écrivons :

$$(L_1) \quad a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$$

Alors :

$$a_1(\lambda s_1 + \mu t_1) + \dots + a_n(\lambda s_n + \mu t_n) = \lambda(a_1 s_1 + \dots + a_n s_n) + \mu(a_1 t_1 + \dots + a_n t_n) = 0 + 0 = 0$$

Pour la dimension : on sait qu'en utilisant des opérations élémentaires on peut transformer le système en un système échelonné équivalent. Certaines lignes ont été annulées dans ce processus, soit $p' \leq p$ le nouveau nombre de lignes. La méthode de résolution de ces systèmes donne les solutions en fonction de $d = n - p'$ paramètres. Cette description paramétrique correspond à une partie génératrice de E - dont on vérifie immédiatement qu'elle est TOUJOURS libre, donc une base de l'espace des solutions E . On obtient $\dim(E) = n - p' \geq n - p$.

□

Remarque 9.2. Supposons que (S_1) est un système d'équations cartésiennes d'un sous-espace vectoriel E_1 (donc $u \in E_1 \iff u$ est solution de (S_1)), et que (S_2) est un système d'équations cartésiennes d'un sous-espace vectoriel E_2 (donc $u \in E_2 \iff u$ est solution de (S_2)). Alors le sous-espace $E_1 \cap E_2$ admet pour système d'équations cartésiennes le système (S) obtenu en mettant bout à bout (S_1) et (S_2) . En effet $u \in E_1 \cap E_2 \iff u \in E_1$ et $u \in E_2$, donc $u \in E_1 \cap E_2$ si et seulement si les composantes de u sont solutions de (S_1) et de (S_2) .

Proposition 9.3 (tout sous-espace vectoriel admet un système d'équations cartésiennes). *Soit E un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n de dimension d . Alors il existe un système linéaire homogène (S) de $n - d$ équations à n inconnues tel que $E = \text{Sol}(S)$ (donc tel que (S) soit un système d'équations cartésiennes de E).*

Démonstration. Une méthode systématique :

- 1) On détermine une base (u_1, \dots, u_d) de E ;
- 2) On la complète en une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^n (on a tout intérêt à appliquer la méthode du théorème de la base incomplète avec la base canonique !)
- 3) Si $(y_1, \dots, y_d, y_{d+1}, \dots, y_n)$ sont les coordonnées dans cette base alors $u \in E \iff y_{d+1} = \dots = y_n = 0$.
- 4) Il n'y a plus qu'à traduire le système en y_j à l'aide des coordonnées dans la base canonique. Il faut donc savoir passer des coordonnées dans la base \mathcal{B} en fonction des coordonnées dans la base canonique (et alors les équations $y_{d+1} = \dots = y_n = 0$ donnent le système (S)).

Pour cela on peut résoudre le système linéaire traduisant que $x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = y_1 u_1 + \dots + y_n u_n$. Ou bien on écrit chaque vecteur de la base canonique sur la base \mathcal{B} : les coordonnées y_1, \dots, y_n s'expriment alors en fonction de (x_1, \dots, x_n) .

□

10. QUELQUES MÉTHODES (INDICATIVES).

10.1. Pour vérifier qu'une suite de vecteurs est libre, ou bien revenir à la définition (cela revient donc à résoudre un système homogène), ou bien appliquer le critère de liberté, ou bien utiliser qu'une sous-suite d'une suite libre est libre etc...

10.2. Pour vérifier qu'une suite engendre un sous-espace E , ou bien revenir à la définition (cela revient donc à résoudre un système avec second membre), ou bien vérifier qu'on peut fabriquer à l'aide de cette suite une suite génératrice déjà connue de E .

10.3. Pour vérifier qu'une suite est une base, ou bien revenir à la définition (libre et génératrice), ou bien faire la moitié du travail en remarquant d'abord que la suite a la longueur attendue, puis en montrant qu'elle est libre (ou génératrice si on préfère).

Quand on a deux bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ d'un même sous-espace vectoriel E , pour exprimer les coordonnées (y'_1, \dots, y'_d) d'un vecteur u dans \mathcal{B}' en fonction des coordonnées (y_1, \dots, y_d) d'un vecteur u dans \mathcal{B} , on écrit le même vecteur dans les deux bases, puis on résout le système linéaire qui traduit cette équation vectorielle.

10.4. Pour vérifier qu'une partie est un sous-espace vectoriel : ou bien revenir à la définition 2.4 et démontrer les deux axiomes, ou bien utiliser (éventuellement plus d'une fois) un des procédés de construction de sous-espaces vectoriels : Vect, somme de deux sous-espaces vectoriels, intersection de deux sous-espaces vectoriels, ou ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.

10.5. Pour trouver une partie génératrice (une base) d'une somme de deux sous-espaces, mettre bout à bout deux bases des sous-espaces de départ.

Pour trouver une partie génératrice d'un sous-espace donné par un système d'équations cartésiennes (et pas par une partie génératrice), résoutre le système par la méthode du pivot : cela donne une partie génératrice.

Pour trouver une partie génératrice d'une intersection de deux sous-espaces on peut commencer par déterminer des systèmes d'équations cartésiennes pour chacun d'eux : le grand système obtenu en mettant ensemble ces deux systèmes convient.

10.6. Pour calculer le rang d'une suite de vecteurs appliquer l'algorithme du rang. Pour calculer la dimension d'un sous-espace, d'abord trouver une partie génératrice puis en extraire une base par l'algorithme du rang.

10.7. Pour compléter une suite libre \mathcal{S} d'un sous-espace vectoriel en une base de ce sous-espace vectoriel, appliquer l'algorithme du rang à la suite $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$, où \mathcal{B} est une base déjà connue de E .

10.8. Soit E un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . Pour déterminer un supplémentaire ET un système d'équations cartésiennes de E commencer par déterminer une base \mathcal{B} de E . Puis compléter cette base en une base $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ de \mathbb{R}^n . Alors $\text{Vect}(\mathcal{B}')$ est un supplémentaire de E . On obtient un système d'équations cartésiennes de E dans $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ en annulant les coordonnées selon \mathcal{B}' . Ensuite en exprimant les coordonnées dans la base $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ en fonction des coordonnées dans la base canonique on en déduit un système d'équations cartésiennes de E .

10.9. Pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires ou bien on revient à la définition (intersection nulle et somme égale à tout \mathbb{R}^n), ou bien on fait la moitié du travail en remarquant d'abord que la somme des dimension est bien n , puis que l'intersection est nulle (ou la somme est égale à tout \mathbb{R}^n si on veut).