Cours de mathématiques.

Pour ceux qui n'ont pas le courage d'aller à la bibliothèque, je signale l'excellent site :
http ://wims.unice.fr/wims/

1. Algèbre linéaire I : espace $\mathbb{R}^n$, matrices et systèmes d'équations linéaires.

1.1. **L'ensemble $\mathbb{R}^n$, ses éléments et ses parties.** En considérant deux points distincts Ω, I sur une droite, on peut repérer tout point M de la droite par un nombre réel - l'abscisse de M dans le repère (Ω, I). Ainsi une droite correspond à l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ; $\mathbb{R}$ est le modèle de toutes les droites.

En considérant deux axes dans un plan, supposés perpendiculaires en un point Ω, on peut repérer tout point du plan par ses deux projections sur les axes. Une fois des repères (Ω, I) et (Ω, J) choisis sur chacun des axes, les projections du point sont repérés par un nombre réel, donc le point est repéré par un couple de réels. Ainsi un plan correspond à l'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ des couples de nombres réels ; $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est le modèle de tous les plans.

De même (par projection sur trois axes perpendiculaires rapportés à des repères), l'espace usuel correspond à l'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ des triplets de nombres réels ; $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est le modèle de l'espace.

Pour simplifier on note $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$.

Définition 1.1. Soit n un entier fixé mais indéterminé, $n \geq 1$. On note $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-uplets de réels, autrement dit $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble de toutes les suites possibles $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où chaque x_i est réel. Les éléments de $\mathbb{R}^n$ seront appelés des *n-vecteurs*, ou plus simplement des *vecteurs*. Les *composantes* d'un n-vecteur $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont les nombres $x_1, \ldots, x_n$. Pour tout n-vecteur u, et pour chaque entier i, $0 \leq i \leq n$, on notera $x_i(u)$ la i-ème composante de u.

On pensera à un n-vecteur comme à un meuble à n tiroirs ; ou alors à un ensemble de n informations unidimensionnelles. Par exemple quand on fait un certain (grand) nombre n de mesures de natures différentes, on peut ranger toutes les observations dans un n-vecteur. Formellement un n-vecteur est identique à une fonction de l'ensemble fini $\{1, 2, \ldots, n\}$ vers $\mathbb{R}$.

Exemple 1.2 (quelques vecteurs particuliers)**.** Le vecteur *nul*, c'est à dire dont toutes les composantes sont nulles, autrement dit $(0, 0, \ldots, 0)$, noté 0 ou parfois $0_{\mathbb{R}^n}$.

Si n est fixé (quoique pas précisé) on peut considérer le vecteur e_1 dans $\mathbb{R}^n$ défini par $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$: toutes les composantes sont nulles sauf la première qui vaut 1.

Plus généralement e_k est le vecteur dans toutes les composantes sont nulles, sauf la k-ième qui vaut 1.

Par exemple dans $\mathbb{R}^2$ on a $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$. Dans $\mathbb{R}^3$ on a $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$. Dans $\mathbb{R}^4$ on a $e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0), e_3 = (0, 0, 1, 0), e_4 = (0, 0, 0, 1)$. Et ainsi de suite.

La notation e_1 n'est ambiguë que si on n'a pas précisé la taille des n-vecteurs considérés.

Pour $n = 2, 3, 4$ au lieu d'écrire les composantes $x_1, x_2, \ldots$ on utilise plutôt les notations : (x, y), (x, y, z), (x, y, z, t).

Pour que deux n-vecteurs u, v soient égaux il est nécessaire et suffisant qu'il aient mêmes composantes.

1.2. **Systèmes d'équations linéaires à n inconnues.**

Exemple 1.3.

$$\begin{cases} 2x-y &= 0 \\ x-3y &= 0 \end{cases}, \begin{cases} 2x-y &= 1 \\ x-3y &= 2 \end{cases}, \begin{cases} x+y-2z &= 1 \\ -x+2y+z &= 0 \end{cases}, \begin{cases} 4x+3y+2z+t &= 0 \\ 3x+2y+z &= 4 \\ 2x+y+4t &= 3 \\ x+4z+3t &= 2 \\ 2y-z+t &= -1 \end{cases}$$

Mais on va étudier des systèmes généraux, à un nombre n d'inconnues, n n'étant pas déterminé. Ces systèmes seront linéaires comme dans les exemples, constitués de p équations, p indéterminé, et avec des coefficients eux aussi indéterminés. Notre but est de trouver des règles générales pour résoudre les systèmes linéaires. La difficulté viendra de ce qu'on manipulera dans le cours des objets plus abstraits que dans les exemples, puisque pas explicites.

Définition 1.4 (matrices)**.** Soit $p \geq 1$ et $n \geq 1$ deux nombres entiers. Une *matrice réelle* $p \times n$ (ou : *à p lignes et n colonnes*) est un tableau rectangulaire de nombres réels (appelés les coefficients de la matrice), ayant p lignes et n colonnes. Pour $p = 1$ on parle de matrice-ligne, pour $n = 1$ de matrice-colonne. On note $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les matrices réelles à p lignes et n colonnes.

On note souvent $(a_{ij})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq n}$ une matrice à p lignes et n colonnes : cela signifie que le coefficient de la matrice situé à la i-ème ligne et à la j-ème colonne est a_{ij}.

La *i-ème ligne de A* est la (matrice) ligne $A = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$, la *$j$-ème colonne* est $A = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{pj} \end{pmatrix}$.

Exemple 1.5. $p = 2, n = 2$; $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. Dans ce cas $a_{11} = 2, a_{21} = 1, a_{12} = -1, a_{22} = -3$. La première ligne est $\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$, la deuxième colonne est $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Autre exemple, avec $p = 5$ et $n = 4$, puis $p = 5, n = 1$: $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

En fait ces matrices sont tirées des premier et dernier systèmes dans les exemples ci-dessus. Pour définir un système linéaire on procède dans l'autre sens : on prend des matrices et on fabrique avec elles un système.

Définition 1.6 (systèmes linéaires à n inconnues)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pn} \end{pmatrix}$ une matrice $p \times n$ et soit $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_p \end{pmatrix}$ une matrice colonne à n lignes.

Alors le *système linéaire* à n inconnues de matrice A et de second membre B est

$$(S)\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \cdots & \cdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n & = b_p \end{cases}.$$

Les *inconnues* sont $x_1, \ldots, x_n$. Les différentes *lignes* du système (S) sont $a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n = b_1$, $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$, etc... Nous noterons $(L_1), \ldots, (L_p)$ les lignes, qui sont chacune des équations linéaires aux inconnues $x_1, \ldots, x_n$.

Une *solution* est un n-vecteur $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ qui vérifie chaque ligne du système, c'est à dire tel que $a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \cdots + a_{1n}s_n = b_1, a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \cdots + a_{2n}s_n = b_2, \ldots, a_{p1}s_1 + a_{p2}s_2 + \cdots + a_{pn}s_n = b_p$.

Nous noterons toujours $\mathrm{Sol}(S)$ l'ensemble de tous les n-vecteurs $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ solutions du système (S).

Remarque : quand le système est homogène, il y a toujours au moins la solution nulle.

Problème : déterminer l'ensemble de toutes les solutions.

1.2.1. *Un cas facile : les systèmes échelonnés.*

Exemple 1.7. Un système échelonné :

$$\begin{cases} 3x - 2y + z + t & = 4 \\ \quad y - z - 2t & = -1 \\ \quad\quad 2z + 3t & = 5 \end{cases}$$

Le système suivant est toujours triangulaire mais pas échelonné lorsque le paramètre a vaut 0 :

$$\begin{cases} 3x - 2y + z + t & = 4 \\ \quad ay - z - 2t & = -1 \\ \quad\quad 2z + 3t & = 5 \end{cases}$$

Définition 1.8 (systèmes triangulaires et échelonnés)**.** Le système linéaire à n inconnues

$$(S)\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \cdots & \cdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n & = b_p \end{cases}$$

est dit *triangulaire* lorsque les coefficients $a_{21}, \ldots, a_{p1}$ sont nuls et plus généralement pour tout $j = 1, \ldots, \min(p, n)$, tous les coefficients $a_{j+1j}, \ldots, a_{pj}$ sont nuls. (Si $p \geq n$ les coefficients non nuls de la matrice (a_{ij}) du système sont donc confinés un triangle en haut à droite - d'où le nom.)

Un système est dit *échelonné* s'il est triangulaire et si de plus aucun des coefficients a_{ii} n'est nul (pour $i = 1, \ldots, \min(p, n)$).

Proposition 1.9 (résolution des systèmes échelonnés)**.** *On considère un système échelonné*

$$(S)\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \cdots & \cdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n & = b_p \end{cases}$$

Si $p > n$, deux cas se présentent :

(1) *Ou bien l'un des coefficients $b_{n+1}, b_{n+2}, \dots, b_p$ est non nul, et dans ce cas $Sol(S) = \emptyset$.*

(2) *Ou bien on a $b_{n+1} = b_{n+2} = \cdots = b_p = 0$, et dans ce cas les $p-n$ dernières équations du système (S) n'apportent aucune contrainte sur les inconnues $x_1, \dots, x_n$, donc on peut les effacer : on est ramené au cas $p = n$.*

Si $p = n$ le système admet une unique solution que l'on calcule de proche en proche en commençant par x_n :

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1n}x_n}{a_{n-1n-1}}$$

(et remplacer x_n par sa valeur, calculée ci-dessus),

$$x_{n-2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2n-1}x_{n-1} - a_{n-2n}x_n}{a_{n-2n-2}}$$

(et remplacer x_{n-1}, x_n par leurs valeurs, calculées ci-dessus),

$$x_{n-3} = \frac{b_{n-3} - a_{n-3n-2}x_{n-2} - a_{n-3n-1}x_{n-1} - a_{n-3n}x_n}{a_{n-2n-2}}$$

(et remplacer x_{n-2}, x_{n-1}, x_n par leurs valeurs, calculées ci-dessus), etc ...

Si $p < n$ alors pour tout choix de paramètres réels $t_{p+1}, \dots, t_n$ le système $S_{(t_{p+1},\dots,t_n)}$ de p équations aux p inconnues $x_1, \dots, x_p$ donné par

$$S_{(t_{p+1},\dots,t_n)} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = b_1 - (a_{1p+1}t_{p+1} + \cdots + a_{1n}t_n) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p & = b_2 - (a_{2p+1}t_{p+1} + \cdots + a_{2n}t_n) \\ \cdots & \cdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pp}x_p & = b_p - (a_{pp+1}t_{p+1} + \cdots + a_{pn}t_n) \end{cases}$$

est échelonné avec autant d'équations que d'inconnues.
Donc $S_{(t_{p+1},\dots,t_n)}$ admet une unique solution, dépendant du choix des paramètres $t_{p+1}, \dots, t_n$, et notée $(s_1(t_{p+1}, \dots, t_n), s_2(t_{p+1}, \dots, t_n), \dots, s_p(t_{p+1}, \dots, t_n))$. Alors

$$Sol(S) = \{(s_1(t_{p+1}, \dots, t_n), s_2(t_{p+1}, \dots, t_n), \dots, s_p(t_{p+1}, \dots, t_n), t_{p+1}, \dots, t_n), \text{pour } t_{p+1}, \dots, t_n \in \mathbb{R}\}$$

1.2.2. *Opérations autorisées sur les systèmes d'équations linéaires à n inconnues.*

Définition 1.10 (systèmes linéaires équivalents)**.** Soient (S_1) et (S_2) deux systèmes linéaires ayant le même nombre n d'inconnues (pas nécessairement le même nombre d'équations).

On dit que les systèmes (S_1) et (S_2) sont *équivalents* si et seulement si $\mathrm{Sol}(S_1) = \mathrm{Sol}(S_2)$, autrement dit si on a l'équivalence :

$$(s_1, \dots, s_n) \text{ solution de } (S_1) \iff (s_1, \dots, s_n) \text{ solution de } (S_2).$$

Autrement dit (S_1) et (S_2) sont équivalents lorsque toute solution de (S_1) est solution de (S_2), et toute solution de (S_2) est solution de (S_1).

Les seules opérations autorisées sur les systèmes sont celles qui transforment un système en un système équivalent.

Exemple 1.11. $\begin{cases} 2x - y & = 0 \\ x - 3y & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 3y & = 0 \\ 2x - y & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 3y & = 0 \\ \quad 5y & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 0 \end{cases}$

Voici des opérations simples sur les systèmes qui permettent de graduellement simplifier le système jusqu'à arriver à un système immédiat à résoudre (par exemple un système échelonné).

1. Permutations de lignes :

Quand on échange deux lignes (L_i) et (L_j) d'un système (S) on obtient un système (S') équivalent. La matrice A' de (S') s'obtient à partir de la matrice A de (S) en permutant les lignes i et j.

Si on repermute les lignes i et j de (S') on retombe sur (S).

2. Permutations d'inconnues (ou de colonnes) :

3. Multiplication d'une ligne par une constante *non nulle* :

Quand on multiplie une lignes (L_i) d'un système (S) par une constante $\alpha \neq 0$, on obtient un système (S') équivalent. La matrice A' de (S') s'obtient à partir de la matrice A de (S) en multipliant la ligne i par α.

Si on multiplie la ligne i de (S') par $\frac{1}{\alpha}$ on retrouve le système (S) (possible parce que $\alpha \neq 0$!!!)

4. Ajout à une ligne d'un multiple *quelconque* d'une ligne *différente* :

Quand on multiplie une lignes (L_j) d'un système (S) par une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ puis qu'on ajoute cette ligne à une autre ligne L_i, on obtient un système (S') équivalent. La matrice A' de (S') s'obtient à partir de la matrice A de (S) en multipliant la ligne j par λ et en l'ajoutant à la i-ème ligne.

Si on multiplie la ligne j de (S') par $-\lambda$, qu'on l'ajoute à la i-ème, on retrouve le système (S) (donc inutile d'avoir $\lambda \neq 0$!!!).

1.2.3. *Résolution des systèmes d'équations linéaires à n inconnues par la méthode du "pivot de Gauss".*

Théorème 1.12. *Soit (S) un système linéaire à p équations et n inconnues. Alors par une suite d'opérations élémentaires (de type 1, 2, 3 ou 4) on peut transformer (S) en un système (S') équivalent et échelonné. Pour résoudre (S) il suffit donc de résoudre le système échelonné (S') par la méthode de la Proposition 1.9.*

Démonstration. On démontre le théorème en donnant une procédure (récursive) dont on vérifie facilement qu'elle transforme (S) en un système (S') échelonné, en n'utilisant que des opérations élémentaires.

0) Si la matrice A du système est nulle on pose $(S') = (S)$.

1) Sinon on trouve la première ligne non nulle L_i dans le système, et on l'échange avec la première ligne (L_1). Cela donne un système (S_1), dans lequel un des coefficients a_{1j} est non nul.

2) Dans la première ligne de (S_1) on repère une inconnue x_j dont le coefficient a_{1j} est non nul, et on permute les inconnues x_1 et x_j. Et on note quelque part qu'on a permuté ces inconnues. Donc dans le nouveau système (S_2) ainsi obtenu le coefficient a_{11} est non nul.

Deux cas se présentent alors :

3) Si L_1 est la seule ligne on pose $(S') = (S_2)$.

4) Si (S_2) a plus d'une ligne, on ajoute $-\frac{a_{i1}}{a_{11}} \times L_1$ aux lignes $L_2, L_3, \ldots, L_p$. Ainsi tous les coefficients de x_1 dans les lignes $L_2, L_3, \ldots, L_p$ du nouveau système (S_4) sont nuls.

(On dit qu'on a utilisé le coefficient a_{11} comme pivot pour remplir de 0 la colonne sous a_{11}.)

5) Puis on considère les lignes $L_2, L_3, \ldots, L_p$ comme un système (T) aux inconnues $x_2, \ldots, x_n$. On traite alors le système plus petit (T) en lui appliquant (récursivement) à nouveau les étapes 0,1,2,3,4. On obtient de la sorte par une suite d'opérations élémentaires un système (T') équivalent à (T) et qui de plus est échelonné. Enfin lors de la production de (T') on a effectué des permutations d'inconnues (étape 2), qu'on a notées : on sait donc quelles inconnues on été permutées.

Le système (S') est alors constitué de la ligne L_1 du système (S_4) , suivi des $p-1$ lignes du système (T') (attention, dans (L_1), il faut permuter les inconnues $x_2, x_3, \ldots, x_n$ selon la permutation utilisée lors de la production de (T')).

$\square$