Corrigé du devoir numéro 4.

**Exercice 1**

(a) Les deux suites $2^{2n}$ et $n2^n$ tendent vers $+\infty$, donc leur somme aussi. Comme $\lim_{x\to+\infty}\ln(x) = +\infty$, on en déduit que $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

(b) On a $2^{2n} + n2^n = 4^n + n2^n = 4^n(1 + \frac{n}{2^n})$. En appliquant ln on obtient

$$u_n = \ln(4^n) + \ln(1 + \frac{n}{2^n}) = n\ln(4) + \ln(1 + \frac{n}{2^n})$$

Par croissance comparée $\frac{n}{2^n} \to 0$ donc $\ln(1 + \frac{n}{2^n}) \to 0$.

Ainsi $\ln(1 + \frac{n}{2^n}) = o(n\ln(4))$, et donc $u_n \sim n\ln(4)$.

Passons à l'étude de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a $1 + n^{\frac{3}{2}} + n^2 = n^2(1 + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{n^2})$. En appliquant le ln on obtient

$$\ln(1 + n^{\frac{3}{2}} + n^2) = \ln(n^2) + \ln(1 + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{n^2}) = 2\ln(n) + \ln(1 + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{n^2})$$

Comme dans l'étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on en déduirait qu'un équivalent de $n\ln(1 + n^{\frac{3}{2}} + n^2)$ est $2n\ln(n)$. Mais on doit ensuite retrancher $2\ln((n+1)^n) = 2n\ln(n+1) \sim 2n\ln(n)$, donc on ne peut pas se contenter de l'équivalent $2n\ln(n)$, il faut pousser l'étude de $u_n$ plus loin.

Si on pose $x_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{n^2}$, on a $x_n \to 0$ et donc $\ln(1 + x_n) = x_n + o(x_n)$ d'après le DL de $\ln(1 + u)$ quand $u \to 0$. Ainsi $\ln(1 + x_n) \sim x_n$. De plus $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + o(\frac{1}{\sqrt{n}})$, donc $x_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$. Il en résulte que $\ln(1 + x_n) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$, et donc $\ln(1 + x_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} + o(\frac{1}{\sqrt{n}})$.

On obtient $n\ln(1 + n^{\frac{3}{2}} + n^2) = 2n\ln(n) + \sqrt{n} + o(\sqrt{n})$.

D'autre part :

$$2\ln((n+1)^n) = 2n\ln(n+1) = 2n[\ln(n(1 + \frac{1}{n}))] = 2n\ln(n) + 2n\ln(1 + \frac{1}{n})$$

D'après le DL de $\ln(1 + u)$ quand $u \to 0$ on a $2n\ln(1 + \frac{1}{n}) \to 2$, une suite négligeable devant $\sqrt{n}$.

Ainsi

$$v_n = \sqrt{n} + o(\sqrt{n}) - 2 + o(1) \sim \sqrt{n}.$$

(c) Comme $v_n \sim \sqrt{n}$ et $\sqrt{n} \to +\infty$ on a $\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$. De plus $u_n \sim n\ln(4)$ et $v_n \sim \sqrt{n}$ , donc $\frac{u_n}{v_n} \sim \sqrt{n}\ln(4)$. Il en résulte que $\frac{u_n}{v_n} \to +\infty$. En particulier il existe un entier $N_1$ tel que pour $n \geq N_1$ on a $\frac{u_n}{v_n} \geq 2$.

Comme $\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$, il existe un entier $N_2$ tel que pour $n \geq N_2$ on a $v_n \geq 1$, donc en particulier $v_n > 0$.

Si $n \geq \max(N_1, N_2)$ alors $\frac{u_n}{v_n} \geq 2$ et $v_n > 0$, donc $u_n \geq 2v_n > v_n$.

**Exercice 2**

(a) Quand $n \to +\infty$ on a $\frac{1}{1+n^2} \to 0$. Donc d'après le DL de $\exp(u)$ quand $u \to 0$ on obtient $\exp(\frac{1}{1+n^2}) = 1 + \frac{1}{1+n^2} + o(\frac{1}{1+n^2})$. De la sorte, on trouve que $\exp(\frac{1}{1+n^2}) - 1 \sim \frac{1}{1+n^2} \sim \frac{1}{n^2}$

De même, quand $n \to +\infty$ on a $\frac{1}{1+n} \to 0$. Donc d'après le DL de $\cos(u)$ quand $u \to 0$ on obtient $\cos(\frac{1}{1+n}) = 1 - \frac{1}{2(1+n)^2} + o(\frac{1}{(1+n)^2})$. Ainsi $\cos(\frac{1}{1+n}) - 1 \sim -\frac{1}{2(1+n)^2} \sim -\frac{1}{2n^2}$.

Par quotient d'équivalents :

$$u_n \sim \frac{\frac{1}{n^2}}{-\frac{1}{2n^2}} = -2.$$

On en déduit que $\lim_{n\to\infty} u_n = -2$.

(b) Etudions $u_n - (-2) = u_n + 2$. On a:

$$u_n + 2 = \frac{\exp(\frac{1}{1+n^2}) - 1}{\cos(\frac{1}{1+n}) - 1} + 2 = \frac{\exp(\frac{1}{1+n^2}) + 2\cos(\frac{1}{1+n}) - 3}{\cos(\frac{1}{1+n}) - 1}$$

On a déjà calculé un équivalent du dénominateur, il s'agit de trouver un équivalent du numérateur.

Or en utilisant les DL de $\exp(u)$ à l'ordre 2 et $\cos(u)$ à l'ordre 4 lorsque $u \to 0$ on a :

$$\begin{aligned}
&\exp(\frac{1}{1+n^2}) + 2\cos(\frac{1}{1+n}) - 3 \\
&= 1 + \frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2(1+n^2)^2} + o(\frac{1}{(1+n^2)^2}) + 2[1 - \frac{1}{2(1+n)^2} + \frac{1}{24(1+n)^4} + o(\frac{1}{(1+n)^4})] - 3 \\
&= (\frac{1}{1+n^2} - \frac{1}{(1+n)^2}) + \frac{1}{2(1+n^2)^2} + o(\frac{1}{(1+n^2)^2}) + \frac{1}{12(1+n)^4} + o(\frac{1}{(1+n)^4})
\end{aligned}$$

Maintenant $\frac{1}{1+n^2} - \frac{1}{(1+n)^2} = \frac{(1+2n+n^2)-(1+n^2)}{(1+n^2)(1+n)^2} = \frac{2n}{(1+n^2)(1+n)^2} \sim \frac{2n}{n^4} = \frac{2}{n^3}$. On peut donc écrire $\frac{1}{1+n^2} - \frac{1}{(1+n)^2} = \frac{2}{n^3} + o(\frac{2}{n^3})$.

D'autre part on a $\frac{1}{(1+n^2)^2} \sim \frac{1}{n^4} = o(\frac{2}{n^3})$, donc

$$\frac{1}{2(1+n^2)^2} + o(\frac{1}{(1+n^2)^2}) = o(\frac{2}{n^3}).$$

Et de même $\frac{1}{(1+n)^4} \sim \frac{1}{n^4} = o(\frac{2}{n^3})$, donc

$$\frac{1}{12(1+n)^4} + o(\frac{1}{(1+n)^4}) = o(\frac{2}{n^3}).$$

Finalement

$$\exp(\frac{1}{1+n^2}) + 2\cos(\frac{1}{1+n}) - 3 = \frac{2}{n^3} + o(\frac{2}{n^3}) \sim \frac{2}{n^3}$$

et donc

$$u_n \sim \frac{\frac{2}{n^3}}{-\frac{1}{2n^2}} \sim -\frac{4}{n}.$$