Corrigé du devoir numéro 3.

Exercice 1

(a) On sait que $\mathrm{Im}(f)$ est engendré par les vecteurs $c_1 = f(1,0,0,0), c_2 = f(0,1,0,0), c_3 = f(0,0,1,0), c_4 = f(0,0,0,1)$.

Donc pour trouver une base de $\mathrm{Im}(f)$ on applique l'algorithme du rang à la suite (c_1, c_2, c_3, c_4).

• $c_1 = (1, -1, 1, -1) \neq (0,0,0,0)$, donc on conserve c_1.

• $c_2 = (0, 1, -2, -1)$ n'est pas proportionnel à c_1, donc on conserve c_2.

• $c_3 = (-1, -1, 2, 2)$ est-il dans $\mathrm{Vect}(c_1, c_2)$, c'est à dire est-il combinaison linéaire de c_1 et c_2 ? Pour le savoir on cherche les solutions à l'équation vectorielle $\lambda c_1 + \mu c_2 = c_3$, laquelle équivaut au(x) système(s) :

$$\begin{cases} \lambda & = -1 \\ -\lambda + \mu & = -1 \\ \lambda - 2\mu & = 2 \\ -\lambda - \mu & = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda & = -1 \\ \mu & = -2 \ (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ -2\mu & = 3 \ (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \\ -\mu & = 1 \ (L_4 \leftarrow L_4 + L_1) \end{cases}$$

Ce système étant visiblement sans solution, on a $c_3 \notin \mathrm{Vect}(c_1, c_2)$ et on conserve c_3.

• $c_4 = (0, 1, -1, 0)$ est-il dans $\mathrm{Vect}(c_1, c_2, c_3)$? On doit résoudre :

$$\begin{cases} \lambda - \nu & = 0 \\ -\lambda + \mu - \nu & = 1 \\ \lambda - 2\mu + 2\nu & = -1 \\ -\lambda - \mu + 2\nu & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda - \nu & = 0 \\ \mu - 2\nu & = 1 \ (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ -2\mu + 3\nu & = -1 \ (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \\ -\mu + \nu & = 0 \ (L_4 \leftarrow L_4 + L_1) \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda - \nu & = 0 \\ \mu - 2\nu & = 1 \\ -\nu & = 1 \ (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2) \\ -\nu & = 1 \ (L_4 \leftarrow L_4 + L_2) \end{cases}$$

Ce système admet bien une solution (bien sûr unique, puisque (c_1, c_2) est libre : $\lambda = \mu = \nu = -1$, de sorte que $c_4 = -(c_1 + c_2 + c_3)$ et on rejette c_4.

Finalement (c_1, c_2, c_3) est une base de $\mathrm{Im}(f)$ - en particulier $\mathrm{rg}(f) = 3$.

Par le théorème noyau-image on en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \mathrm{rg}(f) = 4 - 3 = 1$.

Pour déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ on peut toujours résoudre le système correspondant à l'équation $f(x, y, z, t) = (0,0,0,0)$. Mais on peut aussi reprendre les relations trouvées entre les vecteurs colonnes dans l'algorithme du rang ci-dessus : on a trouvé $c_4 = -(c_1 + c_2 + c_3)$, autrement dit $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = (0,0,0,0)$. Donc

$$f(1,0,0,0) + f(1,0,0,0) + f(1,0,0,0) + f(1,0,0,0) = (0,0,0,0)$$

et comme f est linéaire on obtient

$$f(1,1,1,1) = (0,0,0,0).$$

Ainsi $(1,1,1,1)$ est un vecteur non nul du noyau. Comme $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$, on en déduit que $\big((1,1,1,1)\big)$ est une base du noyau.

(b) Soit A la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

On cherche une matrice ligne $L = (x_1 \ \ x_2 \ \ x_3 \ \ x_4)$ telle que $LA = 0$.

En effectuant le produit LA on voit que L est donné exactement par les solutions du systeme linéaire suivant

$$(C)\left\{\begin{array}{rrrrrl} x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & =0 & (1)\\ & x_2 & -2x_3 & -x_4 & =0 & (2)\\ -x_1 & -x_2 & +2x_3 & +2x_4 & =0 & (3)\\ & x_2 & -x_3 & & =0 & (4) \end{array}\right.$$

Opérer les lignes comme suivant:

(1)+(3)=(3)': $-2x_2+3x_3+x_4=0$;

$2\times(2)+(3)'=(3)''$: $-x_3-x_4=0$;

-(2)+(4)=(4)': $x_3+x_4=0$.

Donc le système devient

$$\left\{\begin{array}{rrrrrl} x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & =0 & (1)\\ & x_2 & -2x_3 & -x_4 & =0 & (2)\\ & & -x_3 & -x_4 & =0 & (3)''\\ & & x_3 & +x_4 & =0 & (4)'' \end{array}\right.$$

dont les solutions sont $\left\{\begin{array}{ll} x_1 & =t\\ x_2 & =-t\\ x_3 & =-t\\ x_4 & =t \end{array}\right.$ avec t un réel quelconque. En prenant $t=1$, on a $L=(1\ \ -1\ \ -1\ \ 1)$ une matrice ligne telle que $LA=0$.

Soit u un élément de $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Im}(A)$, et soit U la colonne correspondante. Alors il existe une colonne X telle que $U=AX$. Et $LU=L(AX)=(LA)X=0$, c'est à dire que u satisfait l'équation $x_1-x_2-x_3+x_4=0$.

L'ensemble des (x_1,x_2,x_3,x_4) solutions de l'équation linéaire $x_1-x_2-x_3+x_4=0$ est un sous-espace vectoriel E. En résolvant l'équation (déjà échelonnée !!!) on trouve $E=\{(x_2+x_3-x_4,x_2,x_3,x_4),\ (x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^3\}$. Donc $E=\mathrm{Vect}(1,1,0,0),(1,0,1,0),(-1,0,0,1))$, de dimension 3.

On a vu ci-dessus que pour tout $u=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathrm{Im}(f)$ on a $x_1-x_2-x_3+x_4=0$, autrement dit $u\in E$. Ainsi $\mathrm{Im}(f)\subset E$. Comme ces deux sous-espaces vectoriels ont la même dimension on en conclut que $\mathrm{Im}(f)=E$.

Ainsi $u\in\mathrm{Im}(f)\iff x_1-x_2-x_3+x_4=0$, ce qui donne une équation cartésienne de l'image de f.

(c) $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Pour voir que $\mathcal{B}'$ est une base, il suffit de vérifier qu'elle est libre **ou** génératrice, puisque $\mathcal{B}'$ a déjà 4 éléments.

Or il est clair que $u_1=e_1$, $u_2-u_1=e_2$, $u_3-u_2=e_3$, $u_4-u_3=e_4$, donc $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}')$ contient la base $\mathcal{B}$, ainsi $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}')\supset\mathrm{Vect}(\mathcal{B})=\mathbb{R}^4$ et $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}')=\mathbb{R}^4$.

Donc $\mathcal{B}'$ est génératrice, et c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

(On peut se reporter à la discussion sur la notion de base échelonnée dans TD-4 Ex.2.)

On a :

$$f(u_1)=f(1,0,0,0)=(1,-1,1,-1),\ \ f(u_2)=f(1,1,0,0)=(1,0,-1,-2),$$

$$f(u_3)=f(1,1,1,0)=(0,-1,1,0),\ \ f(u_4)=f(1,1,1,1)=(0,0,0,0)$$

Donc

$$Mat(f;\mathcal{B}'\to\mathcal{B})=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0\\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

(a) Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ on a

$$AX = \begin{pmatrix} x - y + 3z - 2t \\ -2x + y - z + 3t \\ 3x - 2y + z - t \\ x + 3y - 16z + t \end{pmatrix}.$$

Donc $f(x, y, z, t) = (x - y + 3z - 2t, -2x + y - z + 3t, 3x - 2y + z - t, x + 3y - 16z + t)$.

(b) f est bijective si et seulement si pour tout vecteur $v = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ il existe un et un seul vecteur $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tel que $f(u) = v$, c'est à dire pour a, b, c, d arbitrairement choisis, le système

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccll} x & -y & +3z & -2t & = a & (1) \\ -2x & +y & -z & +3t & = b & (2) \\ 3x & -2y & +z & -t & = c & (3) \\ x & +3y & -16z & +t & = d & (4) \end{array}\right.$$

admet une unique solution.

On résout ce système: il s'agit d'exprimer x, y, z, t en fonction de a, b, c, d, sous la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

pour une certaine matrice P.

Opérer les lignes:

$2 \times (1) + (2) = (2)'$: $-y + 5z - t = 2a + b$ et on met l'équation equivalente $y - 5z + t = -2a - b$;

$-3 \times (1) + (3) = (3)'$: $y - 8z + 5t = -3a + c$;

$-(1) + (4) = (4)'$: $4y - 19z + 3t = -a + d$;

Et le système devient

$$(S)'\left\{\begin{array}{cccccccccl} x & -y & +3z & -2t & = a & & & & (1) \\ & y & -5z & +t & = -2a & -b & & & (2)' \\ & y & -8z & +5t & = -3a & & +c & & (3)' \\ & 4y & -19z & 3t & = -a & & & +d & (4)' \end{array}\right.$$

Opérer les lignes:

$-(2)' + (3)' = (3)''$: $-3z + 4t = -a + b + c$;

$-4(2)' + (4)' = (4)''$: $z - t = 7a + 4b + d$; et on obtient

$$(S)''\left\{\begin{array}{ccccccccl} x & -y & +3z & -2t & = a & & & & (1) \\ & y & -5z & +t & = -2a & -b & & & (2)' \\ & & -3z & +4t & = -a & +b & +c & & (3)'' \\ & & z & -t & = 7a & +4b & & +d & (4)'' \end{array}\right.$$

$3 \times (4)'' + (3)'' = (3)'''$: $t = 20a + 13b + c + 3d$. Echanger la numeration des dernieres deux lignes, le systeme devient

$$(S)'''\left\{\begin{array}{ccccccccl} x & -y & +3z & -2t & = a & & & & (1) \\ & y & -5z & +t & = -2a & -b & & & (2)' \\ & & z & -t & = 7a & +4b & & +d & (3)'' \\ & & & t & = 20a & +13b & +c & +3d & (4)'' \end{array}\right.$$

On trouve ainsi: $t = 20a + 13b + c + 3d$

$z = t + 7a + 4b + d = 27a + 17b + c + 4d$

$y = 5z - t - 2a - b = 113a + 71b + 4c + 17d$
$x = y - 3z + 2t + a = 73a + 46b + 3c + 11d$
Donc

$$\left\{\begin{array}{ccrrrr} x & = & 73a & +46b & +3c & +11d \\ y & = & 113a & +71b & +4c & +17d \\ z & = & 27a & +17b & +c & +4d \\ t & = & 20a & +13b & +c & +3d \end{array}\right.$$

Posons $A' = \begin{pmatrix} 73 & 46 & 3 & 11 \\ 113 & 71 & 4 & 17 \\ 27 & 17 & 1 & 4 \\ 20 & 13 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Alors nous avons montré que

$$f(x,y,z,t) = (a,b,c,d) \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

En particulier, pour (a,b,c,d) donné quelconque, l'équation $f(x,y,z,t) = (a,b,c,d)$ (en x,y,z,t) admet une unique solution, ce qui implique la bijectivité de f.

Pour (a,b,c,d) donné quelconque la colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ vérifie $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$. On obtient $AA' \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ quel que soit a,b,c,d. Donc A est inversible, et A' est son inverse.

(c) D'après les arguments dans (b), l'équation $f(u) = v = (1,2,-2,0)$ admet l'unique solution

$$u = A^{-1}v = \begin{pmatrix} 73 & 46 & 3 & 11 \\ 113 & 71 & 4 & 17 \\ 27 & 17 & 1 & 4 \\ 20 & 13 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 159 \\ 247 \\ 59 \\ 44 \end{pmatrix}$$

(d) Explicitement $B = AM = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ -10 & -10 & -20 \end{pmatrix}$.

(d-i) Soit $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ la suite des vecteurs colonnes de B.

Alors $\mathrm{Im}(B)$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ engendré par $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$. Et on extrait une base de cette suite génératrice de $\mathrm{Im}(B)$ par l'algorithme de rang:

• $\beta_1 \neq 0$, on le garde.
• β_2 n'est pas un multiple de β_1 donc on le garde.
• Par un calcul immédiat (ou en résolvant le système correspondant) on voit que $\beta_3 = \beta_1 + \beta_2$, donc $\beta_3 \in \mathrm{Vect}(\beta_1, \beta_2)$ et on le rejette.

Ainsi $\mathrm{Im}(B)$ admet

$$(\beta_1 = (-1,4,0,-10), \beta_2 = (2,-1,4,-10))$$

comme base.

Pour determiner $\mathrm{Ker}(B)$ explicitement, on peut résoudre le système correspondant à $BX = 0$. On peut aussi remarquer que l'algorithme du rang ci-dessus nous donne d'abord $\mathrm{rg}(B) = 2$, donc par le théorème noyau-image $\dim(\mathrm{Ker}(B)) = 1$. Ensuite on a rejeté le vecteur β_3 à cause de la relation $\beta_3 = \beta_1 + \beta_2$, ou encore $\beta_1+\beta_2-\beta_3=0$. Cela signifie exactement que $g(1,0,0)+g(0,1,0)-g(0,0,1)=(0,0,0,0))$, soit, par linéarité de g, $g(1,1,-1)=(0,0,0,0)$.

Ainsi $(1,1,-1)$ est un vecteur non nul du noyau, et comme $\dim(\mathrm{Ker}(B))=1$, on voit que $\big((1,1,-1)\big)$ est une base du noyau.

Vérifions que $\mathrm{Ker}(B)=\mathrm{Ker}(M)$. On a $B=AM$ et $X\in\mathrm{Ker}(B)\iff BX=0$, autrement dit $AMX=0$. Comme A est inversible on a $AMX=0\iff A^{-1}(AMX)=A^{-1}0$, soit $MX=0$. Finalement $BX=0$ équivaut à $MX=0$, donc être dans $\mathrm{Ker}(B)$ équivaut à être dans $\mathrm{Ker}(M)$.

(d-ii) $E=\mathrm{Vect}((1,1,1),(1,-1,1))$ et $\mathrm{Ker}(B)=\mathrm{Vect}(1,1,-1)$. Donc E et $\mathrm{Ker}(B)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ si (et seulement si) $\big(w_1=(1,1,1),w_2=(1,-1,1),w_3=(1,1,-1)\big)$ est une base.

Or la suite (w_1,w_2,w_3) est clairement génératrice. Par exemple $w_2+w_3=(2,0,0)$, d'où $(1,0,0)=\frac{1}{2}(w_2+w_3)$. Puis $w_1-w_2=(0,2,0)$, d'où $(0,1,0)=\frac{1}{2}(w_1-w_2)$. Enfin $w_1-w_3=(0,0,2)$, d'où $(0,0,1)=\frac{1}{2}(w_1-w_3)$. Donc $\mathrm{Vect}(w_1,w_2,w_3)$ contient la base canonique de $\mathbb{R}^3$, ce qui prouve que $\mathrm{Vect}(w_1,w_2,w_3)=\mathbb{R}^3$.

La suite (w_1,w_2,w_3) engendre $\mathbb{R}^3$ et a trois éléments, donc c'est une base.

Vérifions que $g(E)=\mathrm{Im}(B)$. Notons que B est la matrice de l'application lineaire g sous les bases canoniques, on a alors $\mathrm{Im}(B)=\mathrm{Im}(g)=g(\mathbb{R}^3)$. Comme $E\subset\mathbb{R}^3$ on a $g(E)\subset g(\mathbb{R}^3)$. Reciproquement, soit $u=g(v)\in g(\mathbb{R}^3)$ pour un certain $v\in\mathbb{R}^3$. Alors il existe $e\in E$ et $k\in\mathrm{Ker}(B)$ tels que $v=e+k$ car E est supplémentaire de $\mathrm{Ker}(B)$ dans $\mathbb{R}^3$. On a alors $g(k)=0$, puisque $k\in\mathrm{Ker}(B)$, et aussi

$$u=g(v)=g(e+k)=g(e)+g(k)=g(e)\in g(E)$$

Le vecteur $u\in g(\mathbb{R}^3)$ étant arbitraire, on en déduit que $g(\mathbb{R}^3)\subset g(E)$, ainsi $g(E)=g(\mathbb{R}^3)=\mathrm{Im}(B)$.

(d-iii):

On a déjà vu que $B=AM=\begin{pmatrix}-1&2&1\\4&-1&3\\0&4&4\\-10&-10&-20\end{pmatrix}$.

(1) L'équation $g(u)=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\-1\end{pmatrix}$ se récrit comme

$$\left\{\begin{array}{cccll}-x&+2y&+z&=1&(1)\\4x&-y&3z&=-2&(2)\\&4y&+4z&=3&(3)\\-10x&-10y&-20z&=-1&(4)\end{array}\right.$$

avec $u=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ inconnue.

Opérer les lignes:

$4\times(1)+(2)=(2)'$: $7y+7z=2$; mais ceci contredit le (3): $4y+4z=4$ i.e. $y+z=1$. Donc le système original n'admet pas de solution. Donc il n'y a pas de vecteur u tel que $g(u)=v$ dans ce cas.

(2)L'équation $g(u)=\begin{pmatrix}0\\7\\4\\-30\end{pmatrix}$ se récrit comme $\left\{\begin{array}{cccll}-x&+2y&+z&=0&(1)\\4x&-y&3z&=7&(2)\\&4y&+4z&=4&(3)\\-10x&-10y&-20z&=-30&(4)\end{array}\right.$ avec $u=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ inconnue.

Opérer les lignes:

$4\times(1)+(2)=(2)'$: $7y+7z=7$;

$\frac{1}{4}(3)=(3)'$: $y+z=1$;

$-10\times(1)+(4)=(4)'$: $-30y-30z=-30$.

Le système devient alors

$$\begin{cases} -x & +2y & +z & = 0 & (1) \\ & 7y & 7z & = 7 & (2) \\ & y & +z & = 1 & (3) \\ & -30y & -30z & = -30 & (4) \end{cases}$$

$-(3)' + (1) = (1)''$: $-x + y = 0$

$-7 \times (3)' + (2)' = (2)''$: $0 = 0$;

$30 \times (3)' + (4)' = (4)''$: $0 = 0$;

Le système devient $\begin{cases} -x & +y & & = 0 \\ & y & +z & = 1 \end{cases}$. Et les solutions sont de la forme $\begin{cases} x = & 1-\lambda \\ y = & 1-\lambda \\ z = & \lambda \end{cases}$ pour λ un paramètre réel quelconque.

Comme dans ce cas l'équation $g(u) = v$ admet une solution (et même une infinité de solutions) on sait que $v \in \mathrm{Im}(g)$. Or on a vu que $g(E) = \mathrm{Im}(g)$: donc il existe bien un vecteur $u \in E$ tel que $g(u) = v$.

Reste à vérifier que ce vecteur est unique. Or si u_1, u_2 sont deux vecteurs de E tels que $g(u_1) = g(u_2) = v$, on a par linéarité $g(u_1 - u_2) = v - v = 0$. Donc $u_1 - u_2 \in \mathrm{Ker}(g)$. Mais E est un sous-espace vectoriel: donc on a aussi $u_1 - u_2 \in E$. Alors $u_1 - u_2 \in \mathrm{Ker}(g) \cap E$. Comme E et $\mathrm{Ker}(g)$ sont supplémentaires, l'intersection est nulle et $u_1 - u_2 = 0$, soit $u_1 = u_2$, ce qui montre l'unicité.

Exercice 3

(a) En calculant les quatre vecteurs $f(1,0,0,0), f(0,1,0,0), f(0,0,1,0), f(0,0,0,1)$ on obtient les colonnes de la matrice de f dans la base canonique : $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(b) Pour montrer que $\mathcal{B}'$ est une base il suffit de montrer qu'elle est libre (puisqu'elle est déjà de longueur 4).

Etudions le système:

$$(S) : \begin{cases} -2x & +3y & +8z & +2t & = 0 & (1) \\ 6x & -4y & +5z & +2t & = 0 & (2) \\ -2x & +4y & -2z & -t & = 0 & (3) \\ x & -y & +3z & +t & = 0 & (4) \end{cases}$$

Opérer les lignes:

$2 \times (4) + (1) = (1)'$: $y + 14z + 4t = 0$;

$-6 \times (4) + (2) = (2)'$: $2y - 13z - 4t = 0$;

$2 \times (4) + (3) = (3)'$: $2y + 4z + t = 0$;

Le système devient $(S)' \begin{cases} & y & +14z & +4t & = 0 & (1)' \\ & 2y & -13z & -4t & = 0 & (2)' \\ & 2y & +4 & +t & = 0 & (3)' \\ x & -y & +3z & +t & = 0 & (4) \end{cases}$. Opérer les lignes:

$-(3)' + (2)' = (2)''$: $-17z - 3t = 0$

$-2(1)' + (3)' = (3)''$: $-24z - 7t = 0$.

De $(2)''$ et $(3)''$ on tire que $z = 0 = t$, et $(1)'$ implique alors $y = 0$ et de (4) on a $x = 0$. Donc le système original n'admet que la solution triviale, et $\mathcal{B}'$ est libre, une base de $\mathbb{R}^4$.

Par définition la matrice de passage P est :

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 8 & 2 \\ 6 & -4 & 5 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) D'après la formule de changement de coordonnées on a $X = PX'$, où $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ est la colonne des coordonnées de $(1,2,3,4)$ dans $\mathcal{B}'$. On a donc $X' = P^{-1}X$ et pour déterminer X' il faut d'abord calculer l'inverse de P.

La matrice P^{-1} est composée de quatre colonnes: $P^{-1} = (v_1 \;\; v_2 \;\; v_3 \;\; v_4)$, on a $PP^{-1} = I_4$ et donc v_i est la colonne dont les coordonnées sont les solutions des systèmes linéaires suivants:

$$v_1 : \left\{ \begin{array}{rrrrll} -2x & +3y & +8z & +2t & = 1 & (1)_1 \\ 6x & -4y & +5z & +2t & = 0 & (2)_1 \\ -2x & +4y & -2z & -t & = 0 & (3)_1 \\ x & -y & +3z & +t & = 0 & (4)_1 \end{array} \right. \qquad v_2 : \left\{ \begin{array}{rrrrll} -2x & +3y & +8z & +2t & = 0 & (1)_2 \\ 6x & -4y & +5z & +2t & = 1 & (2)_2 \\ -2x & +4y & -2z & -t & = 0 & (3)_2 \\ x & -y & +3z & +t & = 0 & (4)_2 \end{array} \right.$$

$$v_3 : \left\{ \begin{array}{rrrrll} -2x & +3y & +8z & +2t & = 0 & (1)_3 \\ 6x & -4y & +5z & +2t & = 0 & (2)_3 \\ -2x & +4y & -2z & -t & = 1 & (3)_3 \\ x & -y & +3z & +t & = 0 & (4)_3 \end{array} \right. \qquad v_4 : \left\{ \begin{array}{rrrrll} -2x & +3y & +8z & +2t & = 0 & (1)_4 \\ 6x & -4y & +5z & +2t & = 0 & (2)_4 \\ -2x & +4y & -2z & -t & = 0 & (3)_4 \\ x & -y & +3z & +t & = 1 & (4)_4 \end{array} \right.$$

Après résolution de ces systèmes on trouve:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 10 \\ -34 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \\ -24 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -12 \\ 41 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} -5 \\ 14 \\ -46 \\ 158 \end{pmatrix}.$$

Ainsi l'inverse de P est $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -5 \\ -3 & -2 & 4 & 14 \\ 10 & 7 & -12 & -46 \\ -34 & -24 & 41 & 158 \end{pmatrix}$.

On trouve alors que

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -5 \\ -3 & -2 & 4 & 14 \\ 10 & 7 & -12 & -46 \\ -34 & -24 & 41 & 158 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 61 \\ -196 \\ 673 \end{pmatrix}.$$

(d) La formule de changement de base pour les matrices donne $A' = P^{-1}AP$, donc ici :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -5 \\ -3 & -2 & 4 & 14 \\ 10 & 7 & -12 & -46 \\ -34 & -24 & 41 & 158 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 8 & 2 \\ 6 & -4 & 5 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -44 & -20 & -152 & -44 \\ 131 & 57 & 438 & 127 \\ -424 & -187 & -1432 & -415 \\ 1455 & -641 & 4910 & 1423 \end{pmatrix}.$$