Orsay 2008-2009 IFIPS S2 Mathématiques (M160).

Correction du devoir numéro 2.

Exercice 1
(1) Soit $v \in V$, alors il existe des réels x, y, z, t tels que :

$$v = (x + z + 2t, y + z - t, x - y + 3t)$$

donc

$$v = x(1, 0, 1) + y(0, 1, -1) + z(1, 1, 0) + t(2, -1, 3) \tag{1}$$

En notant $u_1 = (1, 0, 1)$; $u_2 = (0, 1, -1)$; $u_3 = (1, 1, 0)$ et $u_4 = (2, -1, 3)$ alors l'écriture (1) est équivalente à

$$v \in Vect(u_1, u_2, u_3, u_4)$$

Donc

$$V \subset Vect(u_1, u_2, u_3, u_4)$$

Or $u_1 \in V$ (choisir $x = 1$,$y = z = t = 0$) ; $u_2 \in V$ ($x = z = t = 0$, $y = 1$) ; $u_3 \in V$ ($x = y = t = 0$, $z = 0$) et $u_4 \in V$ ($x = y = z = 0$ et $t = 1$). Donc toute combinaison linéaire des vecteurs u_1, u_2, u_3 et u_4 est dans V.
Ce qui montre que

$$Vect(u_1, u_2, u_3, u_4) \subset V$$

On a donc montré que

$$V = Vect(u_1, u_2, u_3, u_4)$$

ce qui montre que V est un espace vectoriel et que $B = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ en est une famille génératrice.

□

(2) Appliquons l'algorithme du rang pour extraire de B une famille libre.
- $u_1 = (1, 0, 1)$ est non nul : on le garde.
- $u_2 \notin Vect(u_1)$ (u_1 et u_2 non liés). Donc on garde u_2.
- Comme $u_3 = u_1 + u_2$ alors $u_3 \in Vect(u_1, u_2)$ donc on le rejette.

Remarque : On pouvait évidemment résoudre le système donné par : $u_3 = au_1 + bu_2$ et voir qu'une éventuelle solution (a, b) existe.
- Pour voir si $u_4 \in Vect(u_1, u_2)$ ou non, on résoud l'équation suivante aux inconnues a et b :

$$u_4 = au_1 + bu_2$$
$$(2, -1, 3) = a(1, 0, 1) + b(0, 1, -1) = (a, b, a - b)$$
$$\begin{cases} 2 = a \\ 1 = -b \\ 3 = a - b \end{cases}$$

Ce système est compatible et admet $(2, -1)$ comme solution. Donc $u_4 \in Vect(u_1, u_2)$. On le rejette.
Par conséquent, la famille $L = (u_1, u_2)$ est une famille libre (extraite de B).
De plus, par l'algorithme du rang, on a

$$Vect(B) = Vect(L)$$

Donc $V = Vect(L)$ et L est une famille génératrice de V.
Etant libre et génératrice de V, elle en est une base.
L ayant 2 vecteurs, alors la dimension de V est 2. C'est donc un plan de $\mathbb{R}^3$.

□

(3) Complétion de L en une base de $\mathbb{R}^3$:
La dimension de $\mathbb{R}^3$ étant 3 alors il manque un vecteur à L pour qu'elle devienne une base de $\mathbb{R}^3$.
Notons $B_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Voyons si e_1 (par exemple) est dans $Vect(L) = Vect(u_1, u_2)$.
Si c'est le cas, il existe des réels a et b tels que

$$e_1 = au_1 + bu_2$$

$$(1, 0, 0) = a(1, 0, 1) + b(0, 1, -1)$$

$$(1, 0, 0) = (a, b, a - b)$$

donc a=1, b=0 et a-b=0 , ce qui est impossible.
Ainsi $B_1 = (u_1, u_2, e_1)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
Comme elle est de cardinal 3 et comme la dimension de $\mathbb{R}^3$ est 3 alors c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Supplémentaire de V dans $\mathbb{R}^3$:
On sait que si E et F sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ ayant la propriété suivante : si en concaténant une base de E et une base de F , on obtient une base de $\mathbb{R}^3$ alors E et F sont supplémentaires.
La complétion de L en une base de $\mathbb{R}^3$ faite ci-dessus, montre que la droite vectoirelle $D = Vect(e_1)$ est un supplémentaire de V dans $\mathbb{R}^3$.

$\square$

(4) Soit $u = (x, y, z)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. On se demande quelles sont les équations liant x, y et z qui permettent de décider si u appartient ou non à V.

- x, y, z sont les coordonnées de u dans la base canonique B_0 : $x = xe_1 + ye_2 + ze_3$.
- Notons y_1,y_2 et y_3 les coordonnées de u dans la base $B_1 = (u_1, u_2, e_1)$, c-a-d les uniques réels tels que

$$u = y_1u_1 + y_2u_2 + y_3e_1$$

-

$$u \in V \textbf{ si et seulement si } y_3 = 0 \tag{2}$$

En effet $u \in V \iff y_1u_1 + y_2u_2 + y_3e_1 \in V$. Comme u_1 et u_2 sont dans V et que V est un espace vectoriel (donc stable par multiplication des scalaires et addition des vecteurs) alors cela est équivalent à $y_3e_1 \in V$, soit encore $y_3e_1 \in V \cap D$.
V et D étant supplémentaires, alors $V \cap D = \{0\}$ donc $y_3e_1 = 0$ donc $y_3 = 0$.
- Exprimons maintenant les vecteurs de la base canonique en fonction de ceux de B_1 :

*$e_1 \in B_1$.
* Ecrivons $e_2 = au_1 + bu_2 + ce_3$ soit $(0, 1, 0) = a(1, 0, 1) + b(0, 1, -1) + c(1, 0, 0)$ soit $(0, 1, 0) = (a + c, b, a - b)$ soit le système

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ b = 1 \\ a - b = 0 \end{cases}$$

Donc $a = b = 1$ et $c = -1$. Donc

$$e_2 = u_1 + u_2 - e_1$$

* De même (ou par simple constatation) , on trouve que

$$e_3 = u_1 - e_1$$

* Finalement, écrivons

$$\begin{aligned} u &= xe_1 + ye_2 + ze_3 \\ &= xe_1 + y(u_1 + u_2 - e - 1) + z(u_1 - e_1) \\ &= \underbrace{(y+z)}_{y_1}u_1 + \underbrace{y}_{y_2}u_2 + \underbrace{(x-y-z)}_{y_3}e_1 \end{aligned}$$

• D'après (2), $u \in V$ si et seulement $y_3 = 0$, c-a-d

$$x - y - z = 0$$

On a donc trouvé l'équation du plan V : géométriquement, c'est l'équation du plan de R^3 passant par $(0,0,0)$ et ayant pour vecteur normal $(1,-1,1)$.

□

Exercice 2

Notons (S) le système :

$$\begin{cases} x - y + t = 0 \ (L_1) \\ x + y - z - t = 0 \ (L_2) \\ 3x - y - z + t = 0 \ (L_3) \end{cases}$$

(1) Pour résoudre le système on applique la méthode du pivot :

$$(S) \iff \begin{cases} x - y + t = 0 \ (L_1) \\ 2y - z - 2t = 0 \ (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ 2y - z - 2t = 0 \ (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1) \end{cases} \iff (S') \begin{cases} x - y \qquad + t = 0 \\ \quad 2y - z - 2t = 0 \end{cases}$$

Ainsi u est solution de (S) si et seulement si u s'écrit :

$$u = (\frac{z}{2}, t + \frac{z}{2}, z, t) = z\underbrace{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0)}_{u_1} + t\underbrace{(0,1,0,1)}_{u_2}$$

avec $(z,t) \in \mathbb{R}^2$. Ceci montre que

$$V = Vect(u_1, u_2)$$

V est, par suite, un espace vectoriel dont une famille génératrice est $B = (u_1, u_2)$. En fait B est clairement libre, donc c'est une base de V.

□

(2-a) $W = \text{Vect}\big((1,2,0,-1),(1,1,-1,0),(-1,0,2,-1)\big)$.

• Trouvons pour simplifier une base de W : $((1,2,0,-1),(1,1,-1,0),(-1,0,2,-1)\big)$ est une famille génératrice de W (par définition de W) mais elle est liée car $(-1,0,2,-1) = (1,2,0,-1) - 2(1,1,-1,0)$. Si on applique l'algorithme du rang on obtient que $\big(\underbrace{(1,2,0,-1)}_{v_1}, \underbrace{(1,1,-1,0)}_{v_2}\big)$ est une base de W.

Ainsi un vecteur u de $\mathbb{R}^4$ appartient à W si et seulement si il est de la forme $u = av_1 + bv_2$, c-a-d $u = (a+b, 2a+b, -b, -a)$

Et le vecteur u de $\mathbb{R}^4$ appartient à V si et seulement si ses composantes sont solutions de (S) (ou du système équivalent (S')).
• Ainsi un vecteur u de $\mathbb{R}^4$ appartient à $V \cap W$ si et seulement si il peut s'écrie sous la forme $u = av_1 + bv_2$, de sorte que les composantes sont solutions de (S').
• On doit donc déterminer les réels (a, b) tels que :

$$\begin{cases} (a+b) - (2a+b) \qquad - a = 0 \\ \quad 2(2a+b) - (-b) - 2(-a) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2a = 0 \\ \quad 3(2a+b) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Ceci montre que

$$V \cap W = \{(0, 0, 0, 0)\}$$

$$dim(V + W) = dim(V) + dim(W) - dim(V \cap W) = 2 + 2 - 0 = 4$$

(2-b) Comme $V + W$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ qui a la même dimension alors

$$V + W = \mathbb{R}^4$$

Donc un spplémentaire est juste l'espace vectoriel nul : $\{(0, 0, 0, 0)\}$.

Deuxième méthode pour traiter (2-a) :
V est déjà donné, par hypothèse, par un système (S) d'équation cartésiennes.
On traduire alors W par un système d'équations (S') par la même méthode que la question (4) de l'exercice (1). On trouve

$$(x, y, z, t) \in W \iff (S') : \begin{cases} x - y = t \\ y + z + 2t = 0 \end{cases}$$

Ensuite on résoud le système formé par (S) et (S'). C-a-d on trouve un système d'équations de $V \cap W$.
Il est facile de voir que (S) et (S') n'ont que $(0, 0, 0, 0)$ comme unique solution.

$\square$

Exercice 3

(1) Le rang de la suite (v_1, v_2, v_3, v_4) est par définition la dimension de V.
$F = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une famille génératrice de V.
Utilisons l'algorithme du rang pour en extraire une famille libre donc une base de V :
• v_1 est non nul ; on le garde.
• $v_2 \notin Vect(v_1)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. En effet, sinon on pourra trouver un $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $v_2 = \lambda v_1$ donc $(2a, 3, -1, 3) = (a\lambda, 2\lambda, (a-1)\lambda, 2\lambda)$. Donc $\lambda = \frac{3}{2}$; $a = 0$ et $-1 = (a-1)\lambda$ ce qui est impossible.
• Voyons si $v_3 \in Vect(v_1, v_2)$:
On peut, soit remarquer directement, que pour tout a, $v_3 = 3v_1 - 2v_2$ soit s'en apercevoir par le calcul :
$v_3 \in Vect(v_1, v_2)$ si et seulement si il existe des réels λ_1 et λ_2 tels que

$$v_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \text{ c-a-d } (-a, 0, 3a-1, 0) = (a\lambda_1 + 2a\lambda_2, 2\lambda_1 + 3\lambda_2, (a-1)\lambda_1 - \lambda_2, 2\lambda_1 + 3\lambda_2)$$

On doit donc résoudre le système correspondant à cette équation vectorielle :

$$\begin{cases} a\lambda_1 + 2a\lambda_2 = -a \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ (a-1)\lambda_1 - \lambda_2 = 3a - 1 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ a\lambda_1 + 2a\lambda_2 = -a \\ (a-1)\lambda_1 - \lambda_2 = 3a - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ \frac{a}{2}\lambda_2 = -a \ (L_2 - \frac{a}{2}L_1) \\ \frac{1-3a}{2}\lambda_2 = 3a - 1 \ (L_3 - \frac{a-1}{2}L_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ a\lambda_2 = -2a \\ 1 - 3a\lambda_2 = 2(3a-1) \end{cases} \iff \begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ a\lambda_2 = -2a \\ \lambda_2 = -2 \ (L_3 + 3aL_2) \end{cases} \iff \begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

Ainsi, pour toute valeur du paramètre a, on a $v_3 = 3v_1 - 2v_2$, donc on rejette v_3.

Remarquer qu'on a utilisé dans la résolution du système des opérations élémentaires qui sont permises quelles que soient les valeurs du paramètre a, notamment parce qu'on n'a jamais divisé par une quantité dépendant de a qui pourrait s'annuler pour certaines valeurs de a (d'où discussions). De cette façon on a évité la multiplication des cas inutiles. Quand on résout un système à paramètre(s) il faut essayer de procéder ainsi : repousser le plus loin possible les distinctions de cas, en effectuant tant qu'on le peut des opérations élémentaires permises quelle que soit la valeur du (ou des) paramètre(s).

• Reste à voir pour quelles valeurs de a, $v_4 \in Vect(v_1, v_2)$.

On résoud l'équation vectorielle $v_4 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$, autrement dit on cherche λ_1, λ_2 tels que $(5a, 7, 2a-3, 7) = \lambda_1(a, 2, a-1, 2) + \lambda_2(2a, 3, -1, 3)$. De façon équivalente on résout le système, avec au début les mêmes étapes que ci-dessus :

$$\begin{cases} a\lambda_1 + 2a\lambda_2 = 5a \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 7 \\ (a-1)\lambda_1 - \lambda_2 = 2a-3 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 7 \\ a\lambda_1 + 2a\lambda_2 = 5a \\ (a-1)\lambda_1 - \lambda_2 = 2a-3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 7 \\ \frac{a}{2}\lambda_2 = \frac{3a}{2} \ (L_2 - \frac{a}{2}L_1) \\ \frac{1-3a}{2}\lambda_2 = \frac{1-3a}{2} \ (L_3 - \frac{a-1}{2}L_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 7 \\ \frac{a}{2}\lambda_2 = \frac{3a}{2} \\ \frac{1}{2}\lambda_2 = \frac{1+6a}{2} \ (L_3 + 3L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 7 \\ \lambda_2 = 1 + 6a \ (2L_3) \\ 0 = a - 3a^2 \ (L_2 - aL_3) \end{cases}$$

Donc si $a - 3a^2 \neq 0$ alors le système n'a pas de solution et $B = (v_1, v_2, v_4)$ est une base de V. Dans ce cas, $dim(V) = 3$

Et si $a - 3a^2 = 0$, autrement dit $a = 0$ ou $a = \frac{1}{3}$ alors le système ci-dessus équivaut à

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 7 \\ \lambda_2 = 1 + 6a \end{cases}$$

qui admet pour unique solution $\lambda_1 = -2 - 9a, \lambda_2 = 1 + 6a$. En particulier $v_4 \in \text{Vect}(v_1, v_2)$, donc $B = (v_1, v_2)$ est une base de V et $dim(V) = 2$.

□

(2) Pour trouver un supplémentaire W de V, on complète B en une base de R^4.

• **Si** $a = 0$: $V = Vect(v_1, v_2)$.

$v_1 = (0, 2, -1, 2)$; $v_2 = (0, 3, -1, 3)$

*$e_1 \notin Vect(v_1, v_2)$: sinon il existe des réels λ_1 et λ_2, tels que :

$e_1 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \iff (1, 0, 0) = (0, 2\lambda_1, -\lambda_1, 2\lambda_1) + (0, 3\lambda_2, -\lambda_2, 3\lambda_2)$ ce qui est impossible.

* $e_2 \notin Vect(v_1, v_2, e_1)$: en effet, il faut résoudre l'équation : $e_2 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 e_1 \iff (0, 1, 0, 0) = (\lambda_3, 2\lambda_1 + 3\lambda_2, -\lambda_1 - \lambda_2, 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3)$ qui donne clairement un système incompatible.

$$B_1 = (v_1, v_2, e_1, e_2) \quad \text{est donc une base de } \mathbb{R}^4$$

et

$$W = Vect(e_1, e_2) \text{ est un supplémentaire de } V \text{ dans } \mathbb{R}^4$$

•**Si** $a = \frac{1}{3}$:$v_1 = (\frac{1}{3}, 2, \frac{-2}{3}, 2)$; $v_2 = (\frac{2}{3}, 3, -1, 3)$.
On remarque que $2v_2 - 3v_1 = (\frac{1}{3}, 0, 0, 0)$ donc $e_1 = 6v_2 - 9v_1$. On rejette e_1. On vérifie facilement que $e_2 \notin Vect(v_1, v_2)$ et que $e_3 \notin Vect(v_1, v_2, e_2)$. Faisons par exemple la vérification pour la dernière :

le système suivant $\begin{cases} 0 = \frac{\lambda_1}{3} + \frac{2\lambda_2}{3} + \lambda_3 \\ 0 = 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \\ 1 = \frac{-2\lambda_1}{3} - \lambda_2 \\ 0 = 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \end{cases}$ est incompatible.

$$B_1 = (v_1, v_2, e_2, e_3) \quad \text{est donc une base de } \mathbb{R}^4$$

$$W = Vect(e_2, e_3) \text{ est un supplémentaire de } V \text{ dans } \mathbb{R}^4$$

• **Si** $a \notin \{0, \frac{1}{3}\}$: $V = Vect(v_1, v_2, v_4)$.
Il manque un vecteur à V pour qu'elle devienne base de $\mathbb{R}^4$.
Or $e_2 \notin Vect(v_1, v_2, v_4)$ car l'écriture $e_2 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_4 v_4$ équivaut à $(0, 1, 0, 0) = \lambda_1(a, 2, a-1, 2) + \lambda_2(2a, 3, -1, 3) + \lambda_4(5a, 7, 2a-3, 7)$ soit au système

$$\begin{cases} a\lambda_1 + 2a\lambda_2 + 5a\lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 7\lambda_4 = 1 \\ (a-1)\lambda_1 - \lambda_2 + (2a-3)\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 7\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

La deuxième et dernière lignes étant incompatibles, alors le système n'a pas de solution.

$$B_2 = (v_1, v_2, v_4, e_2) \quad \text{est donc une base de } \mathbb{R}^4$$

et

$$W = Vect(e_2) \text{ est un supplémentaire de } V \text{ dans } \mathbb{R}^4$$

Récapitulons : **Si** $a = 0$: V est de dimension 2. Une base est (v_1, v_2). Le supplémentaire est $W = Vect(e_1, e_2)$ dont une base est (e_1, e_2).
Si $a = \frac{1}{3}$: V est de dimension 2. Une base est(v_1, v_4). Le supplémentaire est $W = Vect(e_2, e_3)$ de base (e_2, e_3).
Si $a \notin \{0, \frac{1}{3}\}$: V est de dimension 3. Une base est (v_1, v_2, v_4). Le supplémentaire est la droite vectorielle engendrée par e_2.

□

(3) On suit la même méthode que la question (4) de l'exercice 1.
Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On note (y_1, y_2, y_3, y_4) les coordonnées de u dans la base $B_1 = (v_1, v_2, W)$ de V. On rappelle que W est le supplémentaire de V dans $\mathbb{R}^4$.
Alors

$$u \in V \iff \text{les coordonnées suivant } W \text{ sont nulles}$$

• **Si** $a = 0$;
$B_1 = (v_1, v_2, e_1, e_2)$ avec $V = Vect(v_1, v_2)$ et $W = Vect(e_1, e_2)$ le supplémentaire de V dans $\mathbb{R}^4$.

$$u \in V \iff y_3 = y_4 = 0$$

Exprimons les vecteurs e_3 et e_4 de la base canonique en fonction de ceux de B_1 :
On a $v_1 = (0, 2, -1, 2)$; $v_2 = (0, 3, -1, 3)$. Donc $v_2 - v_1 = (0, 1, 0, 1)$. Donc $v_2 - v_1 - e_2 = (0, 0, 0, 1) = e_4$. Ainsi

$$e_4 = v_2 - v_1 - e_2$$

De plus,
$$e_3 = 2v_2 - 3v_1$$
Ainsi
$$u = (x,y,z,t) = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4 = xe_1 + ye_2 + z(2v_2 - 3v_1) + t(v_2 - v_1 - e_2)$$
$$u = \underbrace{(-3z-t)}_{y_1}v_1 + \underbrace{(2z+t)}_{y_2}v_2 + \underbrace{x}_{y_3}e_1 + \underbrace{(y-t)}_{y_4}e_4$$
Donc un système d'équations de V est
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}$$

• **Si** $a = \frac{1}{3}$ Même raisonnement : $V = Vect(v_1, v_2)$; $W = Vect(e_2, e_3)$; $B_1 = Vect(v_1, v_2, e_2, e_3)$.
On exprime e_1 et e_4 en fonction de v_1, v_2, e_2, e_3. On a déjà remarqué que $e_1 = -9v_1 + 6v_2$.
De plus, $v_2 - v_1 = (\frac{1}{3}, 1, -\frac{1}{3}, 1) = \frac{1}{3}e_1 + e_2 - \frac{1}{3}e_3 + e_4 = -3v_1 + 2v_2 + e_2 - \frac{1}{3}e_3 + e_4$. Donc $e_4 = 2v_1 - v_2 - e_2 + \frac{1}{3}e_3$.
Donc les coordonnées d'un vecteur $u = (x,y,z,t)$ dans la base $B = (v_1, v_2, e_2, e_3)$ sont : $y_1 = -9x + 2t$,$y_2 = 6x - t$, $y_3 = y - t$ et $y_4 = z + \frac{1}{3}t$. Un système d'équations définissant V est obtenu en résolvant : $y_3 = y_4 = 0$.
$$\begin{cases} x = 0 \\ 3z + t = 0 \end{cases}$$

• **Si** $a \neq 0$.
$B_1 = (v_1, v_2, v_4, e_2)$ avec $V = Vect(v_1, v_2, v_4)$ et $W = Vect(e_2)$ le supplémentaire de V dans $\mathbb{R}^4$.
$$u \in V \iff y_3 = y_4 = 0$$
$$u \in V \iff y_4 = 0$$
En particulier, on a une seule équation linéaire en x, y, z, t définissant V.
Soit on exprime, comme avant, les vecteurs de la base canonique en fonction de ceux de B_1. Soit on remarque directement que v_1, v_2 et v_4 vérifient l'équation
$$y = t$$
C'est donc l'équation définissant V dans ce cas.