Corrigé et barême du contrôle numéro 4 (du 29 Mai 2009).

Exercice 1 Sur 7 points.

(a) : **2,5 points.**

Les vecteurs colonnes de A sont $c_1 = (1, 2, -1), c_2 = (-2, 1, -1), c_3 = (-3, 4, -3)$. Pour déterminer une base de $\text{Im}(A)$ on applique l'algorithme du rang à (c_1, c_2, c_3).

(0,25 point)

Clairement (c_1, c_2) est libre. D'autre part on remarque que $c_3 = 2c_2 + c_1$ (ou alors on obtient cette relation en résolvant le système linéaire correspondant à l'équation $c_3 = \lambda c_1 + \mu c_2$).

(0,5 point)

Donc une base de l'image de A est (c_1, c_2) et $\text{rg}(f) = 2$.

(0,25 point)

Pour déterminer une base de $\text{Ker}(A)$ on résout le système linéaire correspondant à $AX = 0$:

$$\begin{cases} x - 2y - 3z &= 0 \\ 2x + y + 4z &= 0 \\ -x - y - 3z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y - 3z &= 0 \\ 5y + 10z &= 0 \ (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ -3y - 6z &= 0 \ (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 2y - 3z &= 0 \\ \quad y + 2z &= 0 \ (L_2 \leftarrow \frac{L_2}{5}) \\ \quad y + 2z &= 0 \ (L_3 \leftarrow \frac{L_2}{-3}) \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y - 3z &= 0 \\ \quad y + 2z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= -z \\ y &= -2z \end{cases}$$

On obtient donc $\text{Ker}(A) = \{(-z, -2z, z),\ z \in \mathbb{R}\}$, soit $\text{Ker}(A) = \text{Vect}(-1, -2, 1)$. Or $(-1, -2, 1) = -c_1$ et $\text{Vect}(-c_1) = \text{Vect}(c_1)$. Donc pour finir (c_1) est une base de $\text{Ker}(A)$.

(1 point)

On a $\text{Ker}(A) = \text{Vect}(c_1)$ et c_1 est dans le sous-espace vectoriel image de A. Donc $\text{Ker}(A) \subset \text{Im}(A)$, et $\text{Ker}(A) \cap \text{Im}(A) = \text{Ker}(A) \neq \{0\}$. Il en résulte que $\text{Im}(A)$ et $\text{Ker}(A)$ ne sont pas en somme directe, et a fortiori ils ne sont pas supplémentaires.

(0,5 point)

(b) : **3 points**

Pour montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ il suffit de montrer qu'elle est génératrice (puisqu'elle a trois vecteurs). Pour cela on vérifie que chaque vecteur e_1, e_2, e_3 de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire de u_1, u_2, u_3.

Après résolution de trois systèmes ou après quelques essais on obtient :

$$e_1 = -(u_2 + u_3), e_2 = u_1 + 2u_2 + 3u_3, e_3 = e_1 + 3e_2 + 5e_3$$

Ainsi (u_1, u_2, u_3) est bien génératrice, et c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

(1 point)

La matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est la matrice dont les colonnes sont les composantes des vecteurs de $\mathcal{B}'$, on trouve donc immédiatement :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(0,5 point)

Pour calculer l'inverse de P on peut ou bien utiliser les méthodes classiques d'inversion d'une matrice, ou bien interpréter P^{-1} comme la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$. Alors les colonnes de

P^{-1} sont les coordonnées dans $\mathcal{B}'$ des vecteurs de $\mathcal{B}$. Et on a déjà déterminé ces coordonnées au début de la question. On obtient donc, sans calcul supplémentaire :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(1 point)
Soient (x', y', z') les coordonnées de $u = (0, 2, -1)$ dans $\mathcal{B}'$. Alors nous savons que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \text{ soit } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ soit encore } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(0,5 point)
(c) :**1,5 point**
En calculant $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ on obtient $f(x, y, z) = (x - 2y - 3z, 2x + y + 4z, -x - y - 3z)$.
(0,25 point)
On sait que $A' = P^{-1}AP$,
(0,5 point)
et on a déjà calculé P^{-1}. On obtient alors

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(0,75 point)

Exercice 2 Limites de suites : **sur 8 points.**
(a) : **2,5 points**
On a $(2 + \frac{1}{n})^n = [2.(1 + \frac{1}{2n})]^n = 2^n(1 + \frac{1}{2n})^n$. Or $(1 + \frac{1}{2n})^n = e^{n \ln(1 + \frac{1}{2n})}$. Et d'après le DL de $\ln(1 + u)$ quand $u \to 0$ on a $\ln(1 + \frac{1}{2n}) = \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{2n})$, soit $\ln(1 + \frac{1}{2n}) = \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$. On en déduit $(1 + \frac{1}{2n})^n = e^{\frac{1}{2} + o(1)}$, autrement dit $(1 + \frac{1}{2n})^n \sim \sqrt{e}$.
Finalement par produit d'équivalents on a bien $(2 + \frac{1}{n})^n = 2^n(1 + \frac{1}{2n})^n \sim \sqrt{e} \cdot 2^n$.
(1,25 point)
La suite $a_n = \frac{n^3 \ln(n) + 2^n}{(2 + \frac{1}{n})^n}$ est un quotient, et on vient de trouver un équivalent du dénominateur. Reste à traiter le numérateur.
(0,25 point)
Par croissances comparées on a $\ln(n) = o(n)$, donc par produit de suites négligeables on a $n^3 \ln(n) = o(n^4)$. A nouveau par croissances comparées on a $n^4 = o(2^n)$. Donc en composant les petit o on obtient $n^3 \ln(n) = o(2^n)$.
Il en résulte que $n^3 \ln(n) + 2^n \sim 2^n$.
(0,75 point)
Finalement $a_n \sim \frac{2^n}{\sqrt{e} \cdot 2^n}$. D'où $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{e}}$ et donc $a_n \to \frac{1}{\sqrt{e}}$.
(0,25 point)
(b) : **2,5 points**

D'après le DL de e^u quand $u \to 0$ on obtient

$$e^{-\frac{2}{n}} = 1 + (-\frac{2}{n}) + \frac{1}{2}(-\frac{2}{n})^2 + o(\frac{1}{n^2}) = 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

(0,5 point)

$\frac{n^2}{(n+1)^2} = (\frac{n}{n+1})^2 = (\frac{1}{1+\frac{1}{n}})^2$. D'après le DL de $\frac{1}{1+u}$ quand $u \to 0$, on a $\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$. En élevant au carré il vient :

$$(\frac{1}{1+\frac{1}{n}})^2 = [1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})]^2 = 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{2}{n^3} + o(\frac{1}{n^2})$$

En regroupant tous les $o(\frac{1}{n^2})$ on obtient donc :

$$\frac{n^2}{(n+1)^2} = 1 + \frac{-2}{n} + \frac{3}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

Donc $\alpha = 1, \beta = -2, \gamma = 3$.

(1,5 point)

Ainsi

$$b_n = n^2[(1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})) - (1 + \frac{-2}{n} + \frac{3}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}))] = n^2(-\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})) = -1 + o(1)$$

et donc $b_n \to -1$.

(0,5 point)

(c) : **3 points**

On a :

$$r_n = \sqrt{\ln(\alpha + \beta n^k)} = \sqrt{\ln(n^k(\beta + \frac{\alpha}{n^k}))} = \sqrt{\ln(n^k) + \ln(\beta + \frac{\alpha}{n^k})} = \sqrt{\ln(n^k)[1 + \frac{\ln(\beta + \frac{\alpha}{n^k})}{\ln(n^k)}]}$$

Le facteur $1 + \frac{\ln(\beta + \frac{\alpha}{n^k})}{\ln(n^k)}$ tend vers 1, donc $r_n \sim \sqrt{\ln(n^k)}$.

(1 point)

Or $\sqrt{\ln(n^k)} = \sqrt{k \ln(n)} = \sqrt{k}\sqrt{\ln(n)}$, donc $r_n \sim \sqrt{k}\sqrt{\ln(n)}$.

(0,25 point)

La suite c_n considérée est fabriquée à l'aide de trois suites du type $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qu'on vient d'étudier.

Le dénominateur $\sqrt{\ln(1+n^3)}$ est ainsi équivalent à $\sqrt{3}\sqrt{\ln(n)}$

(0,25 point)

Etudions le numérateur $\sqrt{\ln(1+n^2)} - \sqrt{\ln(1+2n)}$. On a $\sqrt{\ln(1+n^2)} \sim \sqrt{2}\sqrt{\ln(n)}$ et $\sqrt{\ln(1+2n)} \sim \sqrt{\ln(n)}$,

(0,25 + 0,25 point)

donc $\sqrt{\ln(1+n^2)} = \sqrt{2}\sqrt{\ln(n)} + o(\sqrt{\ln(n)})$ et $\sqrt{\ln(1+2n)} = \sqrt{\ln(n)} + o(\sqrt{\ln(n)})$ et on en déduit que $\sqrt{\ln(1+n^2)} - \sqrt{\ln(1+2n)} = (\sqrt{2}-1)\sqrt{\ln(n)} + o(\sqrt{\ln(n)})$.

(0,5 point)

Ainsi $\sqrt{\ln(1+n^2)} - \sqrt{\ln(1+2n)} \sim (\sqrt{2}-1)\sqrt{\ln(n)}$.

(0,25 point)

Par quotient d'"équivalents on obtient :

$$c_n \sim \frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{\ln(n)}}{\sqrt{3}\sqrt{\ln(n)}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}$$

donc $c_n \to \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}$ $(= \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{3}})$.

(0,25 point)

Exercice 3 Sur 6 points.

(a) : **0,5 point.**

On a $n^{-2} = \frac{1}{n^b}$ avec $b = 2 > 0$, et $2^{-n} = \frac{1}{a^n}$ avec $a = 2 > 1$. Donc par croissance comparée $2^{-n} = o(n^{-2})$.

(b) : **0,75 point.**

D'après le DL de $\cos(u)$ quand $u \to 0$ on a $1 - \cos(\frac{1}{n}) = 1 - (1 - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}))$.

(0,25 point)

Donc $v_n = \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) + 2^{-n}$. Comme on vient de le voir on a $2^{-n} = o(\frac{1}{n^2})$, donc finalement $v_n = \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$.

(0,25 point)

Ceci nous donne l'équivalent : $v_n \sim \frac{1}{2n^2}$.

(0,25 point)

(c) **1,25 point**

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le quotient de deux suites, et nous venons de donner un équivalent du dénominateur. Il reste à trouver un équivalent du numérateur $\frac{n^2-\ln(n)}{n^4+\ln(n)}$. Or cette suite est elle-même un quotient, pour lequel on trouve facilement un équivalent.

En effet par croissance comparée on a $-\ln(n) = o(n^2)$, donc $n^2 - \ln(n) \sim n^2$. Et de même $n^4 + \ln(n) \sim n^4$.

(0,25 point+0,25 point)

Ainsi par quotient d'équivalents $\frac{n^2-\ln(n)}{n^4+\ln(n)} \sim \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}$.

(0,25 point)

Alors à nouveau par quotients d'équivalents on obtient

$$u_n \sim \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{2n^2}} = 2$$

Ceci montre que $\lim_{n\to\infty} u_n = 2$.

(0,5 point)

(d) : **3,5 points**

Calculons $u_n - 2$ en réduisant au même dénominateur :

$$u_n - 2 = \frac{\frac{n^2-\ln(n)}{n^4+\ln(n)} - 2 + 2\cos(\frac{1}{n}) - 2.2^{-n}}{1 - \cos(\frac{1}{n}) + 2^{-n}}$$

Pour étudier $u_n - 2$, nous nous concentrons sur le numérateur, puisque nous disposons déjà d'un équivalent du dénominateur par le (b).

D'abord en reprenant l'argument du (b), mais en poussant le DL de $\cos(u)$ quand $u \to 0$ à l'ordre quatre, nous obtenons $-2 + 2\cos(\frac{1}{n}) - 2.2^{-n} = -\frac{1}{n^2} + \frac{1}{12n^4} + o(\frac{1}{n^4})$.

(0,5 point)

Traitons maintenant le terme $\frac{n^2-\ln(n)}{n^4+\ln(n)}$. Pour cela on écrit $\frac{n^2-\ln(n)}{n^4+\ln(n)} = (\frac{1}{n^2} - \frac{\ln(n)}{n^4})(\frac{1}{1+\frac{\ln(n)}{n^4}})$.

Par croissance comparée $\frac{\ln(n)}{n^4} \to 0$, donc on peut utiliser le DL de $\frac{1}{1+u}$ quand $u \to 0$, et on obtient :

$$\frac{1}{1+\frac{\ln(n)}{n^4}} = 1 - \frac{\ln(n)}{n^4} + o(\frac{\ln(n)}{n^4})$$

(0,5 point)

Ceci donne :

$$\frac{n^2 - \ln(n)}{n^4 + \ln(n)} = (\frac{1}{n^2} - \frac{\ln(n)}{n^4})(1 - \frac{\ln(n)}{n^4} + o(\frac{\ln(n)}{n^4})) = \frac{1}{n^2} - \frac{\ln(n)}{n^4} - \frac{\ln(n)}{n^6} + \frac{(\ln(n))^2}{n^8} + o(\frac{\ln(n)}{n^6}).$$

(0,5 point)

Clairement $\frac{\ln(n)}{n^6} = o(\frac{\ln(n)}{n^4}$. Par croissance comparée on a aussi $\frac{(\ln(n))^2}{n^8} = o(\frac{\ln(n)}{n^4})$. Enfin évidemment $o(\frac{\ln(n)}{n^6}) = o(\frac{\ln(n)}{n^4})$ (le quotient est $o(\frac{1}{n^2})$, donc tend vers 0). Finalement l'expression ci-dessus se simplifie :

$$\frac{n^2 - \ln(n)}{n^4 + \ln(n)} = \frac{1}{n^2} - \frac{\ln(n)}{n^4} + o(\frac{\ln(n)}{n^4}).$$

(0,5 point)

Le numérateur de $u_n - 2$ devient donc :

$$\frac{n^2 - \ln(n)}{n^4 + \ln(n)} - 2 + 2\cos(\frac{1}{n}) - 2.2^{-n} = \frac{1}{n^2} - \frac{\ln(n)}{n^4} + o(\frac{\ln(n)}{n^4}) - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{12n^4} + o(\frac{1}{n^4}) - 2.2^{-n}$$

$$= -\frac{\ln(n)}{n^4} + \frac{1}{12n^4} + o(\frac{\ln(n)}{n^4})) + o(\frac{1}{n^4}) - 2.2^{-n}.$$

(0,5 point)

Par croissance comparée on a $\frac{1}{12n^4} = o(\frac{\ln(n)}{n^4})$, $o(\frac{1}{n^4}) = o(\frac{\ln(n)}{n^4})$, et enfin $-2.2^{-n}. = o(\frac{\ln(n)}{n^4})$. Donc finalement en regroupant tous les $o(\frac{\ln(n)}{n^4})$:

$$\frac{n^2 - \ln(n)}{n^4 + \ln(n)} - 2 + 2\cos(\frac{1}{n}) - 2.2^{-n} = -\frac{\ln(n)}{n^4} + o(\frac{\ln(n)}{n^4}))$$

de sorte que $\frac{n^2-\ln(n)}{n^4+\ln(n)} - 2 + 2\cos(\frac{1}{n}) - 2.2^{-n} \sim -\frac{\ln(n)}{n^4}$.

Alors par quotient d'équivalents on a

$$u_n - 2 \sim \frac{-\frac{\ln(n)}{n^4}}{\frac{1}{2n^2}} = -\frac{2\ln(n)}{n^2}$$

(0,5 point)

En divisant cet équivalent par $\frac{1}{n}$ on trouve $-\frac{2\ln(n)}{n}$, qui tend vers 0 par croissance comparée. Donc $u_n - 2 = o(\frac{1}{n})$.

(0,25 point)

Mais quand on divise l'équivalent par $\frac{1}{n^2}$ on trouve $-2\ln(n)$, qui tend vers $+\infty$. Donc $u_n - 2$ n'est pas grand O de $\frac{1}{n^2}$.

(0,25 point)