Corrigé et barême du contrôle numéro 3 (sur 20,75 points).

Exercice 1 : 7,75 points.

(a) : **1 point.**

Compte-tenu de la formule on peut déterminer immédiatement les vecteurs-colonnes:

$$f(1,0,0,0) = (1,1,1), f(0,1,0,0) = (1,2,3), f(0,0,1,0) = (-1,1,3), f(0,0,0,1) = (-1,-2,-3).$$

On en déduit que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

(b) : **2,25 points.**

On applique l'algorithme du rang à la la suite des vecteurs-colonnes :

$$\big(c_1 = (1,1,1), c_2 = (1,2,3), c_3 = (-1,1,3), c_4 = (-1,-2,-3)\big).$$

• $c_1 \neq 0$, on le garde.

• $c_2 \notin \mathbb{R}c_1$, on le garde.

• $c_3 \in \text{Vect}(c_1, c_2) \iff \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \ / \ c_3 = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2$ $(*)$. Or l'équation vectorielle $(*)$ équivaut aux systèmes :

$$(*) \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = -1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 & = 1 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 & = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = -1 \\ \quad \lambda_2 & = 2 \ (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ \quad 2\lambda_2 & = 4 \ (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 & = -3 \\ \lambda_2 & = 2 \end{cases}.$$

Donc $c_3 \in \text{Vect}(c_1, c_2)$ et on le rejette.

• $c_4 = -c_2$, on le rejette.

Conclusion : (c_1, c_2) est une base de $\text{Im}(f)$.

D'où $\text{rg}(f) = 2$.

Or $\text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}^4)$.

Donc $\dim(\text{Ker}(f)) = 4 - 2 = 2$

(c) : **1,5 points.**

Par définition du noyau $(x,y,z,t) \in \text{Ker}(f) \iff f(x,y,z,t) = 0$, ce qui équivaut au système :

$$(S) \begin{cases} x + y - z - t & = 0 \\ x + 2y + z - 2t & = 0 \\ x + 3y + 3z - 3t & = 0 \end{cases}$$

et donc (S) est un système d'équations cartésiennes de $\text{Ker}(f)$.

Résolution de (S) :

$$(S) \iff \begin{cases} x + y - z - t & = 0 \\ \quad y + 2z - t & = 0 \ (L_2 \leftarrow L_2 - L1) \\ \quad 2y + 4z - 2t & = 0 \ (L_3 \leftarrow L_3 - L1) \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - z - t & = 0 \\ \quad y + 2z - t & = 0 \end{cases}$$

Ainsi $\text{Sol}(S) = \{(3z, t - 2z, z, t), z, t \in \mathbb{R}\}$.

D'où $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((3,-2,1,0),(0,1,0,1))$.
Or $((3,-2,1,0),(0,1,0,1))$ est clairement libre, donc c'est une base de $\text{Ker}(f)$.
(d) : **3 points.**
(d-i) : **0,5 point**
L'équation vectorielle $(1,3,3,-3) = \lambda(1,1,-1,-1) + \mu(1,2,1,-2)$. équivaut aux systèmes :

$$\begin{cases} \lambda+\mu & = 1 \\ \lambda+2\mu & = 3 \\ -\lambda+\mu & = 3 \\ -\lambda-2\mu & = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda+\mu & = 1 \\ \quad \mu & = 2 \ (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ \quad 2\mu & = 4 \ (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \\ \quad -\mu & = -2 \ (L_4 \leftarrow L_4 + L_1) \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda & = -1 \\ \mu & = 2 \end{cases}$$

(d-ii) : **1,75 points.**
On a $F = \{(a,b,c,) \in \mathbb{R}^3, -a+2b-c=0\} = \{(2b-c,b,c), b,c \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\big((2,1,0),(-1,0,1)\big)$.
Or $\big((2,1,0),(-1,0,1)\big)$ est clairement libre, donc F est bien un plan vectoriel.
Si $v = (a,b,c)$ appartient à $\text{Im}(f)$ alors $\exists u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ tel que $f(u) = v$, ce qui donne :

$$\begin{cases} x+y-z-t & = a \\ x+2y+z-2t & = b \\ x+3y+3z-3t & = c \end{cases}$$

Alors

$$-a+2b-c = (z+t-x-y) + 2(x+2y+z-2t) - (x+3y+"z-3t) = 0$$

d'où $v \in F$. Ceci démontre que $\text{Im}(f) \subset F$.
(d-iii) : **0,75 point.**
On vient de voir que $\text{Im}(f) \subset F$. Et on sait que $\dim(F) = \dim(\text{Im}(f)) = 2$, on en déduit donc $\text{Im}(f) = F$.
Ainsi $\text{Im}(f) = \{(a,b,c,) \in \mathbb{R}^3, a-2b+c=0\}$, et donc $a-2b+c=0$ est une équation cartésienne de $\text{Im}(f)$.

Exercice 2 : 4,5 points.

(a) : **0,75 point.**

Ici encore on détermine à l'oeil nu les vecteurs-colonnes, et on trouve donc :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) : **1,5 points.**

On sait que f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. On doit donc déterminer le noyau de f.

Or $u = (x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f) \iff (x, y, z)$ est solution des systèmes :

$$(S) \begin{cases} x + y - z & = 0 \\ -x + y + z & = 0 \\ x - y + z & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - z & = 0 \\ \quad 2y & = 0 \ (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ -2y + 2z & = 0 \ (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 0 \\ z & = 0 \end{cases}$$

On a bien $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et donc f est injective.

Par le théorème du rang on a $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \mathrm{Ker}(f) = 3 - 0 = 3$. Ainsi $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$ (f est surjective).

(c) **1,5 points.**

On vient de voir que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$, donc $\mathrm{Ker}(A) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^3$, et A est inversible.

Pour déterminer A^{-1} on résout $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ (où (x', y', z') est fixé dans $\mathbb{R}^3$, et où (x, y, z) est l'inconnue).

Ceci revient à résoudre le système :

$$(S) \begin{cases} x + y - z & = x' \\ -x + y + z & = y' \\ x - y + z & = z' \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - z & = x' \\ \quad 2y & = x' + y' \ (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ -2y + 2z & = z' - x' \ (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - z & = x' \\ \quad 2y & = x' + y' \\ \quad 2z & = z' + y' \ (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} x & = \frac{x'+z'}{2} \\ y & = \frac{x'+y'}{2} \\ z & = \frac{y'+z'}{2} \end{cases}$$

On obtient $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Autrement dit $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(d) **0,75 point.**

Pour résoudre l'équation matricielle $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, on peut ou bien résoudre le système correspondant, ou bien utiliser le calcul de A^{-1} fait ci-dessus. En effet

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

On obtient $(x,y,z)=(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$.

Exercice 3 : **8,5 points.**

(a) **1,75 points.**

On a $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+y-z\\x+y-2z\\x+z\end{pmatrix}$, donc $f(x,y,z)=(2x+y-z,x+y-2z,x+z)$.

L'application f est injective $\iff$ $\mathrm{Ker}(f)=\{0\}$, il s'agit donc de déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.

La résolution de $f(x,y,z)=(0,0,0)$ revient à la résolution des systèmes

$$(S)\ \begin{cases}2x+y-z&=0\\x+y-2z&=0\\x+z&=0\end{cases}\iff\begin{cases}x+z&=0\ (L_1\leftarrow L_3)\\x+y-2z&=0\\2x+y-z&=0\ (L_3\leftarrow L_1)\end{cases}\iff\begin{cases}x+z&=0\\\quad y-3z&=0\ (L_2\leftarrow L_2-L_1)\\\quad y-3z&=0\ (L_3\leftarrow L_3-2L_1)\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x+z&=0\\\quad y-3z&=0\end{cases}\iff\begin{cases}x&=-z\\y&=3z\end{cases}$$

Ainsi $\mathrm{Ker}(f)$ contient par exemple le vecteur non nul $(-1,3,1)$, et f est non injective.

En fait on voit que $\big((-1,3,1)\big)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$, qui est donc une droite vectorielle.

(b) **1,25 points.**

$\mathcal{B}'$ est une suite de trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, donc c'est une base si et seulement si elle est libre (ou alors génératrice, mais inutile de vérifier les deux).

Dans ce cas on peut appliquer facilement l'algorithme du rang : en effet $u_1\neq 0$, u_2 n'est pas multiple de u_1 et enfin $u_3=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2$ impliquerait (en considérant les deuxièmes et troisièmes composantes) que $\lambda_2=-3$ et $\lambda_1=-1$. Alors la relation $\lambda_1+\lambda_2=1$ n'est pas vérifiée, de sorte que $u_3\notin\mathrm{Vect}(u_1,u_2)$.

Ainsi (u_1,u_2,u_3) est libre et c'est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

Comme on a la formule générale de $f(x,y,z)$, on trouve facilement $f(u_1)=(1,-1,2), f(u_2)=(3,2,1), f(u_1)=(0,0,0)$. Ainsi, puisque la base d'arrivée est la base canonique, on a tout de suite :

$$M=\begin{pmatrix}1&3&0\\-1&2&0\\2&1&0\end{pmatrix}$$

(c) **2 points.**

Par définition des matrices de passage, on a :

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-3\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

La formule de changement de coordonnées est : $X=PX'$

Pour trouver P^{-1} on peut résoudre le système P comme a l'exercice 2, question (c). On peut aussi interprêter P^{-1} comme la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$: ainsi trouver P^{-1} c'est trouver comment exprimer les vecteurs de la base canonique en fonction des vecteurs u_1, u_2, u_3 (les vecteurs-colonnes de P).

On voit que $u_1 + u_3 = (2, -3, 0)$, donc $u_1 + u_3 + 3u_2 = (5, 0, 0)$ de sorte que $e_1 = (1, 0, 0) = \frac{1}{5}(u_1 + 3u_2 + u_3)$. Puis $e_2 = u_2 - e_1 = \frac{1}{5}(-u_1 + 2u_2 - u_3)$ et enfin $e_3 = u_1 - e_1 = \frac{1}{5}(4u_1 - 3u_2 - u_3)$. Pour finir nous obtenons :

$$P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(0,75 point)

Les coordonnées (x', y', z') dans $\mathcal{B}'$ du vecteur $v = (1, 1, 1)$ sont alors données par la formule :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On obtient ainsi

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

(d) : **2,25 point**

On a vu en (a) que $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 1$, donc d'après le théorème noyau image on a $\operatorname{rg}(f) = 2$.

Pour montrer que (u_1, u_2) est une base de $\operatorname{Im}(f)$ il suffit donc de montrer que c'est une suite libre de $\operatorname{Im}(f)$.

Le fait que (u_1, u_2) est libre est évident (par exemple on a déjà vérifié que (u_1, u_2, u_3) est une base).

Reste à vérifier que $u_1 \in \operatorname{Im}(f)$ et $u_2 \in \operatorname{Im}(f)$ (en d'autre termes que u_1 et u_2 sont des combinaisons linéaires des vecteurs colonnes de A). On peut ou bien résoudre les deux équations vectorielles $f(x_1, y_1, z_1) = u_1$ et $f(x_2, y_2, z_2) = u_2$, ou bien remarquer que :

- u_2 est le deuxième vecteur colonne de A - donc $f(0, 1, 0) = u_2$, en particulier $u_2 \in \operatorname{Im}(f)$;
- u_1 est la différence entre le premier et le deuxième vecteur colonne de A - donc $f(1, -1, 0) = u_1$, en particulier $u_1 \in \operatorname{Im}(f)$;

Comme (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, les sous-espaces engendrés par (u_1, u_2) d'une part et (u_3) sont supplémentaires. Or on constate que (u_3) est justement une base de $\operatorname{Ker}(f)$ (par la question (a)), et on vient de montrer que (u_1, u_2) est une base de $\operatorname{Im}(f)$. Ainsi $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont bien supplémentaires.

Pour $u = x'u_1 + y'u_2 + z'u_3$, on a alors $u \in \operatorname{Im}(f)$ si et seulement si $z' = 0$.

Or d'après la relation $X' = P^{-1}X$ on a $z' = \frac{1}{5}(x - y - z)$. Ainsi $u \in \operatorname{Im}(f)$ si et seulement si $x - y - z = 0$.

(e) **1,25 point**

Comme $f(u_3) = (0, 0, 0)$ la dernière colonne de A' est nulle.

La formule est $A' = P^{-1}AP$.

Après les deux produits de matrice on obtient :

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$