Corrigé du contrôle numéro 1.

Exercice 1 : Aire d'un domaine du plan.

(a) En représentant D on voit que $D = D_1 \cup D_2$ avec $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2-1 \leq y \leq 3x+3,\ x \leq 0\}$ et $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2-1 \leq y,\ y+3x^2 \leq 3,\ x \geq 0\}$. (Cela est justifié par le fait que d'une part $x^2-1 \leq y \leq 3-3x^2$ implique $4x^2 \leq 4$ donc $x \in [-1,+1]$. Ensuite une étude rapide de signe sur $[-1,+1]$ montre que $3x+3 \leq 3-3x^2$ sur $[-1,0]$ et $3x+3 \geq 3-3x^2$ sur $[0,+1]$, d'où le découpage $D = D_1 \cup D_2$.)

Les deux domaines D_1, D_2 sont en tranches verticales, ils se rencontrent le long d'un segment vertical de l'axe des y.

(b) En utilisant le découpage décrit en (a) on a d'abord :

$$\text{Aire}(D) = \text{Aire}(D_1) + \text{Aire}(D_2)$$

Ensuite on calcule par Fubini en piles :

$$\text{Aire}(D_1) = \int_{x=-1}^{x=0} dx\big(\int_{x^2-1}^{3x+3} 1dy\big) = \int_{-1}^{0} 4+3x-x^2dx = [4x+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3]_{-1}^{0} = 4-\frac{3}{2}-\frac{1}{3} = \frac{13}{6}$$

Puis on calcule (à nouveau à l'aide de Fubini) :

$$\text{Aire}(D_2) = \int_{x=0}^{x=1} dx\big(\int_{x^2-1}^{3-3x^2} 1dy\big) = \int_{0}^{1} 4-4x^2dx = [4x-\frac{4}{3}x^3]_0^1 = 4-\frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

(Remarque : les aires touvées pour D_1 et D_2 sont bien positives.)

Ainsi

$$\text{Aire}(D) = \frac{13}{6}+\frac{8}{3} = \frac{29}{6}.$$

Exercice 2 : Calculs d'intégrales multiples.

(a) Par Fubini :

$$\int_D \sin(x+y)\ dxdy = \int_{x=0}^{x=\pi} dx\big(\int_0^{\pi-x} \sin(x+y)dy\big) = \int_0^{\pi} [-\cos(x+y)]_0^{\pi-x}dx = \int_0^{\pi}(1+\cos x)dx = \pi$$

(b) Le domaine D est en tranches horizontales : lorsque y varie de -1 à $+1$, l'abscisse x varie de $\sqrt{1-y^2}$ à 2. Donc :

$$\int_D xy^2dxdy = \int_{y=-1}^{y=+1} dy(\int_{\sqrt{1-y^2}}^{2} xy^2dx) = 2\int_0^1 dy(\int_{\sqrt{1-y^2}}^{2} xy^2dx)$$

$$= \int_0^1 y^2[x^2]_{\sqrt{1-y^2}}^{2}dy = \int_0^1 y^2(4-(1-y^2))dy = \int_0^1 3y^2dy + \int_0^1 y^4dy = 1+\frac{1}{5} = \frac{6}{5}$$

(c) En passant d'abord en polaires :

$$\int_D (1+x^2+y^2)\ dxdy = \int_R (1+r^2)rdrd\theta$$

avec $R = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2,\ 1 \leq r \leq \sqrt{2},\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$. Puis en appliquant Fubini sur le rectangle R :

$$\int_R (1+r^2) r dr d\theta = \int_1^{\sqrt{2}} (r+r^3)\pi dr = \pi[\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4}]_1^{\sqrt{2}} = \pi(1+1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}) = \frac{5\pi}{4}$$

(d) Le domaine est en tranches verticales au dessus de $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$. Donc on peut appliquer Fubini dans l'espace :

$$\int_D (1-x-y)z\ dxdydz = \int_{(x,y)\in\Delta} dxdy \Big(\int_0^{1-x-y} (1-x-y)zdz = \frac{1}{2} \int_\Delta (1-x-y)^3 dxdy$$

On peut maintenant appliquer à nouveau Fubini en piles, mais dans le plan :

$$\int_\Delta (1-x-y)^3 dxdy = \int_0^1 dx \Big(\int_0^{1-x} (1-x-y)^3 dy \Big)$$

Pour calculer $\int_0^{1-x} (1-x-y)^3 dy$ il est commode d'effectuer le changement de variable $u = x+y$. On obtient :

$$\int_0^{1-x} (1-x-y)^3 dy = \int_x^1 (1-u)^3 du = \frac{1}{4}[-(1-u)^4]_x^1 = \frac{1}{4}(1-x)^4$$

Alors :

$$\int_D (1-x-y)z\ dxdydz = \frac{1}{8} \int_0^1 (1-x)^4 dx = \frac{1}{40}[(x-1)^5]_0^1 = \frac{1}{40}.$$

Exercice 3 : Volume d'un solide de l'espace.

D'abord Volume$(S) = \int_S 1 dxdydz$. Ensuite le domaine S correspond en coordonnées cylindriques à un domaine simple. En effet $(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z) \in D$ si et seulement si (r,θ,z) appartient au domaine D défini par : $D = \{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3,\ 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ -r \leq z \leq r\}$. Pour calculer le volume de S on passe donc en coordonnées cylindriques:

$$\text{Volume}(S) = \int_D r dr d\theta dz$$

Puis on applique Fubini :

$$\int_D r dr d\theta dz = \int_R dr d\theta \Big(\int_{-r}^{+r} r dz \Big) = 2\int_R r^2 dr d\theta = \frac{2}{3} \times [r^3]_0^1 \times [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{3}$$

(dans ce calcul on a posé $R = [0,1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.)

Exercice 4 : Comparaison d'intégrales.

(a) Lorsque $(x,y) \in D$ on a $0 \leq x$ et $0 \leq y - x$ donc $y \geq x \geq 0$. Ainsi $xy \geq 0$.

On en tire que $e^{-xy} \in [0,1]$ pour $(x,y) \in D$. Donc pour $(x,y) \in D$ on a $x + y \leq x + y + e^{-xy} \leq x + y + 1$. Comme $u \mapsto e^u$ est une fonction croissante en obtient l'inégalité demandée :

$$e^{x+y} \leq f(x,y) \leq e^{x+y+1}$$

(b) L'intégrale est croissante, donc on peut intégrer l'encadrement trouvé en (a) :

$$\int_D e^{x+y} dxdy \leq \int_D f(x,y) dxdy \leq \int_D e^{x+y+1} dxdy.$$

Or $\int_D e^{x+y+1}dxdy = \int_D e.e^{x+y}dxdy = e\int_D e^{x+y}dxdy$, donc il suffit de calculer $\int_D e^{x+y}dxdy$. Par Fubini :

$$\int_D e^{x+y}dxdy = \int_{x=0}^{x=1} dx\Big(\int_x^{1+x} e^{x+y}dy\Big) = \int_0^1 (e^{1+2x} - e^{2x})dx = \frac{1}{2}[e^{1+2x} - e^{2x}]_0^1 = \frac{1}{2}(e^3 - e^2 - e + 1)$$

On obtient finalement :

$$\frac{1}{2}(e^3 - e^2 - e + 1) \leq \int_D f(x,y)dxdy \leq \frac{1}{2}(e^4 - e^3 - e^2 + e).$$

Exercice 5 : Equations différentielles.

(a) Le polynôme caractéristique de l'équation différentielle est $X^2 + X - 2$. Une racine évidente est 1, l'autre est -2. La solution générale de l'équation différentielle homogène associée est donc :

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-2x}$$

avec λ, μ des paramètres réels quelconques.

Le second membre est de la forme $P(x)e^{sx}$ avec $P(x) = 3x$ (polynôme) et $s = 1$, racine simple du polynôme caractéristique. Donc nous cherchons une solution particulière de la forme $y(x) = (Ax^2 + Bx)e^x = Q(x)e^x$.

On a $y'(x) = (Q'(x) + Q(x))e^x$ et $y''(x) = (Q''(x) + 2Q'(x) + Q(x))e^x$. Donc :

$$y''(x) + y'(x) - 2y(x) = (Q''(x) + 3Q'(x) + 0Q(x))e^x = (2A + 3B + 6Ax)e^x$$

et $y(x)$ est solution si et seulement si (en identifiant les coefficients) on a $2A + 3B = 0$ et $6A = 3$. La solution est $A = \frac{1}{2}$ et $B = -\frac{1}{3}$.

Ainsi la solution générale de l'équation différentielle est :

$$x \mapsto (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x)e^x + \lambda e^x + \mu e^{-2x}$$

avec λ, μ des paramètres réels quelconques.

(b) Le polynôme caractéristique de l'équation différentielle est $X^2 - 6X + 9$. On a une racine double égale à 3. La solution générale de l'équation différentielle homogène associée est donc :

$$x \mapsto \lambda e^{3x} + \mu x e^{3x}$$

avec λ, μ des paramètres réels quelconques.

Le second membre est de la forme $P(x)e^{sx}$ avec $P(x) = 27x^2$ (polynôme) et $s = 0$, non racine du polynôme caractéristique. Donc nous cherchons une solution particulière de la forme $y(x) = Ax^2 + Bx + C = Q(x)$.

On a $y'(x) = 2Ax + B$ et $y''(x) = 2A$. Donc :

$$y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = (9Ax^2 + (9B - 12A)x + 9C - 6B + 2A$$

et $y(x)$ est solution si et seulement si (en identifiant les coefficients) on a $9A = 27$, $9B - 12A = 0$ et $9C - 6B + 2A = 0$. La solution est $A = 3$, $B = 4$, $C = 2$.

Ainsi la solution générale de l'équation différentielle est :

$$x \mapsto 3x^2 + 4x + 2 + \lambda e^{3x} + \mu x e^{3x}$$

avec λ, μ des paramètres réels quelconques.