Orsay 2008-2009 IFIPS S2 Mathématiques (M160).

Contrôle numéro 4 (du 29 Mai 2009).
Durée : 2h (à titre indicatif : Maths : 1h40, Matlab : 20 mns).
Calculatrices et documents interdits.

La qualité de la rédaction et la clarté des explications interviendront dans l'appréciation de la copie. Le contrôle comporte trois exercices de mathématiques (sur cet énoncé), un exercice de Matlab. Pour l'exercice de Matlab, répondre directement sur l'énoncé. Barême indicatif (sur 25) : 7 - 7 - 7 (Maths) ; 4 (Matlab).

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

(a) Déterminer le rang de A, une base de $\mathrm{Im}(A)$ et une base de $\mathrm{Ker}(A)$.
A t-on $\mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Ker}(A) = \mathbb{R}^3$?

(b) On considère trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis comme suit :

$$u_1 = (1, 2, -1), u_2 = (-2, 1, -1), u_3 = (1, -1, 1).$$

Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Donner la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ à $\mathcal{B}'$, puis calculer l'inverse de P. Quelles sont les coordonnées de $u = (0, 2, -1)$ dans $\mathcal{B}'$?

(c) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dans la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est A. Déterminer $f(x, y, z)$. Soit A' la matrice de f dans $\mathcal{B}'$: déterminer A'.

Exercice 2 Limites de suites.

(a) Montrer que $(2 + \frac{1}{n})^n \sim \sqrt{e} \cdot 2^n$. En déduire la limite de la suite

$$a_n = \frac{n^3 \ln(n) + 2^n}{(2 + \frac{1}{n})^n}$$

(justifier votre résultat).

(b) Montrer que $e^{-\frac{2}{n}} = 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$. Déterminer les réels α, β, γ tels que $\frac{n^2}{(n+1)^2} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$.
En déduire la limite de

$$b_n = n^2 e^{-\frac{2}{n}} - \frac{n^4}{(n+1)^2}$$

(justifier votre résultat).

(c) Pour $\lambda \geq 1, \mu \geq 0$ deux réels, et $k \geq 1$ un entier, on considère la suite $r_n = \sqrt{\ln(\lambda + \mu\, n^k)}$. Montrer que $r_n \sim \sqrt{k}\sqrt{\ln(n)}$. En déduire la limite de

$$c_n = \frac{\sqrt{\ln(1 + n^2)} - \sqrt{\ln(1 + 2n)}}{\sqrt{\ln(1 + n^3)}}$$

(justifier votre résultat).

Exercice 3

(a) Comparer les suites n^{-2} et 2^{-n} (quand $n \to \infty$).

(b) Pour $n \geq 1$, soit $v_n = 1 - \cos(\frac{1}{n}) + 2^{-n}$. Donner un équivalent simple de v_n.

(c) On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ dont le n-ième terme est :

$$u_n = \frac{\frac{n^2 - \ln(n)}{n^4 + \ln(n)}}{1 - \cos(\frac{1}{n}) + 2^{-n}} .$$

Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = 2$.

(d) Montrer que $u_n - 2 = o(\frac{1}{n})$, mais que $u_n - 2$ n'est pas grand O de $\frac{1}{n^2}$.