Orsay 2008-2009 IFIPS S2 Mathématiques (M160).

Contrôle numéro 3. Durée : 2h. Calculatrices et documents interdits.

La qualité de la rédaction et la clarté des explications interviendront dans l'appréciation de la copie.
Le contrôle comporte trois exercices. Barême indicatif : 7 - 5 - 8.

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z, t) = (x + y - z - t, x + 2y + z - 2t, x + 3y + 3z - 3t)$$

et soit A la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$.

(a) Déterminer A.

(b) Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$. Que vaut $\mathrm{rg}(f)$? et $\dim(\mathrm{Ker}(f))$?

(c) Donner un système d'équations cartésiennes de $\mathrm{Ker}(f)$. Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

(d) Dans cette question on considère les coefficients λ, μ tels que

$$(1, 3, 3, -3) = \lambda(1, 1, -1, -1) + \mu(1, 2, 1, -2).$$

(d-i) Déterminer λ et μ.

(d-ii) Soit F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ constitué des solutions (a, b, c) de l'équation $c = \lambda a + \mu b$. Montrer que F est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$, puis que $\mathrm{Im}(f) \subset F$.

(d-iii) En déduire une équation cartésienne de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (x + y - z, -x + y + z, x - y + z)$$

et soit A la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(a) Déterminer A.

(b) Montrer que f est injective. Que dire de $\mathrm{Im}(f)$?

(c) Montrer que A est inversible et calculer son inverse A^{-1}.

(d) Résoudre l'équation matricielle $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit f l'application linéaire dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est A.

(a) Déterminer $f(x, y, z)$. L'application f est-elle injective ?

(b) On pose $u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (1, 1, 0), u_3 = (1, -3, -1)$, puis $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Déterminer la matrice $M = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}' \to \mathcal{B})$.

(c) Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Pour $u = (x, y, z)$ de coordonnées (x', y', z') dans $\mathcal{B}'$, donner une relation entre $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et P.

Calculer P^{-1}, puis donner les coordonnées dans $\mathcal{B}'$ du vecteur $v = (1, 1, 1)$.

(d) Montrer que (u_1, u_2) est une base de $\mathrm{Im}(f)$ puis que $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}^3$. A quelle condition sur les coordonnées (x', y', z') d'un vecteur u dans $\mathcal{B}'$ a t-on $u \in \mathrm{Im}(f)$? Donner une équation cartésienne de $\mathrm{Im}(f)$.

(e) Soit $A' = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}')$. Quelle est la dernière colonne de A' ? Rappeler la formule reliant A, A' et P. Déterminer A'.