Contrôle numéro 2.

Durée : 2h. Calculatrices et documents interdits.

La qualité de la rédaction interviendra dans l'appréciation de la copie.
Barême indicatif : 3 - 5 - 6 - 6.

Exercice 1 : Systèmes linéaires.
Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1)\ \begin{cases} x-2y+3z &= 2\\ 2x-y-z &= 3\\ x-y+z &= 2\end{cases},\quad (S_2)\ \begin{cases} x+y+z &= 1\\ 3x-y+z &= 3\\ x+3y+2z &= 2\end{cases},\quad (S_3)\ \begin{cases} x+2y-z-t &= 1\\ 3x+7y-2z-t &= 3\\ 5x+12y-3z-t &= 5\\ x+3y+t &= 1\end{cases}$$

Exercice 2 : Un sous-espace vectoriel déterminé par un système d'équation cartésiennes.
Soit $E=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\ x-y+z-t=0 \text{ et } x+y-z-t=0\}$.
(a) Parmi les vecteurs suivants déterminer ceux qui appartiennent à E :

$$e_1=(1,0,0,0), u_0=(1,1,0,0), u_1=(0,1,1,0), u_2=(1,0,0,1), u_3=(1,-1,-1,1)$$

(b) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
(c) Montrer que (u_1,u_2) est une base de E et déterminer $\dim(E)$.
(d) La suite (u_1,u_2,u_3) est-elle libre ? et la suite (u_0,u_1,u_2) ?

Exercice 3 : Un sous-espace vectoriel déterminé par une partie génératrice.
Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs suivants :

$$u_1=(1,1,1,1), u_2=(1,3,3,3), u_3=(2,1,1,1), u_4=(3,4,4,4), u_5=(0,1,1,1)$$

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par (u_1,u_2,u_3,u_4,u_5).
(a) La suite (u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) est-elle libre ? Donner une base $\mathcal{B}$ de E.
(b) Compléter $\mathcal{B}$ en une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^4$.
(c) Déterminer les coordonnées de $u=(x,y,z,t)$ dans la base $\mathcal{B}'$ (on pourra, par exemple, commencer par trouver les coordonnées de chacun des vecteurs $(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)$ dans la base $\mathcal{B}'$).
(d) Déterminer un système d'équation cartésiennes de E, c'est à dire un système linéaire homogène (S) tel que $E=\mathrm{Sol}(S)$.
(e) Déterminer un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 4 : Deux sous-espaces vectoriels.
Soient $E=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\ x+2y-z-t=0 \text{ et } x-y-z+2t=0\}$ et F le sous-espace vectoriel engendré par $v_1=(1,0,-1,0)$ et $v_2=(1,1,0,1)$.
(a) Donner une base de E.
(b) Déterminer la dimension de F. Les vecteurs v_1 et v_2 appartiennent-ils à E ? En déduire que $\dim(E\cap F)<2$.
(c) Soient y_1,y_2 des réels : à quelle condition sur y_1 et y_2 la combinaison linéaire $y_1v_1+y_2v_2$ appartient-elle à E ? Déterminer une base et la dimension de $E\cap F$.
(d) Quelle est la dimension de $E+F$? Déterminer un supplémentaire de $E+F$ dans $\mathbb{R}^4$.