

## Contrôle numéro 1.

Durée : 2h. Calculatrices et documents interdits.

La qualité de la rédaction interviendra dans l'appréciation de la copie.

Barème indicatif : 3 + 8 + 2 + 3 + 4.

**Exercice 1 :** Aire d'un domaine du plan.Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - 1 \leq y, y + 3x^2 \leq 3, y \leq 3x + 3\}$ .

- (a) Représenter  $D$ .
- (b) Calculer l'aire de  $D$ .

**Exercice 2 :** Calculs d'intégrales multiples.

Calculer :

- (a)  $\int_D \sin(x+y) \, dx dy$ ,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq \pi\}$ .
- (b)  $\int_D xy^2 \, dx dy$ ,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1, x^2 + y^2 \geq 1\}$ .
- (c)  $\int_D (1 + x^2 + y^2) \, dx dy$ ,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, x \geq 0\}$ .
- (d)  $\int_D (1 - x - y)z \, dx dy dz$ ,  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$ .

**Exercice 3 :** Volume d'un solide de l'espace.Calculer le volume du solide  $S$ , avec  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \geq 0, y \geq 0, z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ .**Exercice 4 :** Comparaison d'intégrales.

On considère la fonction

$$f(x, y) = e^{(x+y+e^{-xy})}$$

sur le domaine  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y - x \leq 1\}$ .

- (a) Donner le signe de  $xy$  pour  $(x, y) \in D$  et montrer que pour  $(x, y) \in D$  on a

$$e^{x+y} \leq f(x, y) \leq e^{x+y+1}$$

- (b) En déduire un encadrement de  $\int_D f(x, y) \, dx dy$ .

**Exercice 5 :** Equations différentielles.

Résoudre les équations différentielles suivantes (on donnera d'abord la solution générale de l'équation linéaire homogène associée) :

- (a)  $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 3xe^x$
- (b)  $y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 27x^2$