Devoir 3 : Théorème de Céva et affinités.

(à rendre au plus tard le 17/11/03)

Soit a, b, c trois points distincts non alignés d'un plan affine E. On considère trois points p, q, r sur $(bc), (ac), (ab)$, on suppose $p \notin \{b, c\}$, $q \notin \{a, c\}$, $r \notin \{a, b\}$. On introduit les réels α, β, γ qui multipliés par $\overrightarrow{pb}, \overrightarrow{qc}, \overrightarrow{ra}$ donnent $\overrightarrow{pc}, \overrightarrow{qa}, \overrightarrow{rb}$.

1) Préliminaires: affinités de E.

Soit D une droite de E, $\vec{\Delta}$ une droite de $\vec{E}$, supplémentaire de $\vec{D}$, et k un nombre réel. On appelle *affinité d'axe D, de direction $\vec{\Delta}$, de rapport k* l'application $f_{D,\vec{\Delta},k}$ de E dans E envoyant un point m sur $h_{p(m),k}(m)$ (avec $p(m)$ le projeté de m sur D parallèlement à $\vec{\Delta}$ et $h_{\omega,\kappa}$ l'homothétie de centre ω et de rapport κ).

1-i) Montrer que $f_{D,\vec{\Delta},k}$ fixe tous les points de D, qu'elle est affine et que les droites $\vec{D}$ et $\vec{\Delta}$ sont des droites propres de l'application linéaire associée; donner aussi les valeurs propres associées.

1-ii) On suppose que f est une affinité d'axe D , de direction $\vec{\Delta}$ et de rapport k. Soit a un point de E, b son image par f et c un point de D. Déterminer $\vec{f}(\overrightarrow{ab})$ et $\vec{f}(\overrightarrow{ac})$.

Dans la suite on note f_p, f_q, f_r les affinités $f_{(ap),\overrightarrow{(bc)},\alpha}$, $f_{(bq),\overrightarrow{(ac)},\beta}$, $f_{(cr),\overrightarrow{(ab)},\gamma}$ et on pose $\sigma = f_q \circ f_p \circ f_r$.

2) Vérifier que σ fixe a et déterminer la matrice de $\vec{\sigma}$ dans $(\vec{u}, \vec{v}) = (\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac})$.

3) Montrer que σ^2 est une homothétie de rapport $k = -\alpha.\beta.\gamma$.

4) On suppose les droites $(ap), (bq), (cr)$ parallèles ou concourantes. Montrer que l'ensemble des points fixes de σ est la droite (ap). En déduire que $\alpha.\beta.\gamma = -1$.

5) Réciproquement on suppose que $\alpha.\beta.\gamma = -1$.

5-i) Montrer que σ est une symétrie oblique d'axe (ap).

5-ii) On suppose que (cr) coupe (ap) en un point g. Montrer qu'alors g est fixe par f_q. En déduire que $g \in (bq)$.

5-iii) Montrer que les droites $(ap), (bq), (cr)$ sont parallèles ou concourantes.

Enoncer le résultat obtenu.