

CAPES externe de Mathématiques
session 1996
deuxième composition

Énoncé

<http://perso.wanadoo.fr/megamaths>

⁰[ag37e]

NOTATIONS DU PROBLÈME

Soit Π un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On notera d la distance sur Π . Si \mathcal{R} est un sous-ensemble non vide de Π et M un point de Π , on notera $d(M, \mathcal{R})$ la distance de M à \mathcal{R} , définie par $d(M, \mathcal{R}) = \inf_{N \in \mathcal{R}} d(M, N)$. Étant donné un point M de Π et un réel positif r , on notera $\bar{B}(M; r)$ le disque fermé de centre M et de rayon r et $C(M; r)$ le cercle de centre M et de rayon r . Si r est strictement positif, on notera $B(M; r)$ le disque ouvert de centre M et de rayon r . Étant donné deux points A et B de Π , on note $[A, B]$ le segment d'extrémités A et B et on note $]A, B[$ ce segment privé de ses extrémités.

La frontière d'un sous-ensemble \mathcal{R} de Π sera notée $\partial\mathcal{R}$: on rappelle qu'un point M appartient à $\partial\mathcal{R}$ si et seulement si tout disque ouvert de centre M contient au moins un point appartenant à \mathcal{R} et au moins un point n'appartenant pas à \mathcal{R} . On a en particulier $\partial\bar{B}(M; r) = \partial B(M; r) = C(M; r)$.

Soit \mathcal{R} un sous-ensemble borné non vide de Π . Pour tout point M de Π , on notera $n(M)$, avec éventuellement $n(M) = \infty$, le nombre des points T de $\partial\mathcal{R}$ tels que $d(M, \partial\mathcal{R}) = d(M, T)$. On appellera squelette de \mathcal{R} , et on notera $\text{sq}(\mathcal{R})$, le sous-ensemble des points M de \mathcal{R} tels que $n(M) \geq 2$.

I. EXEMPLES DE SQUELETTES

I.1. Squelette d'un carré.

Dans cette question on désigne par \mathcal{R} l'ensemble des points M du plan Π dont les coordonnées (x, y) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ vérifient $|x| < 1$ et $|y| < 1$. On note A, B, C et D les points de coordonnées respectives $(1, 1), (-1, 1), (-1, -1)$ et $(1, -1)$.

I.1.1. Démontrer que $\partial\mathcal{R}$ est la réunion des quatre segments $[A, B], [B, C], [C, D]$ et $[D, A]$.

I.1.2. Démontrer que si un point M de coordonnées (x, y) est intérieur au triangle OAD , on a alors $d(M, \partial\mathcal{R}) = 1 - x$ et $n(M) = 1$.

I.1.3. Démontrer que si un point M de coordonnées (x, y) appartient à $]O, A[$, on a alors $d(M, \partial\mathcal{R}) = 1 - x = 1 - y$ et $n(M) = 2$.

I.1.4. Calculer $n(O)$.

I.1.5. Démontrer que $\text{sq}(\mathcal{R}) =]A, C[\cup]B, D[$.

I.1.6. Démontrer que le squelette de l'intérieur d'un carré est la réunion de ses diagonales, sommets non compris.

I.2. Squelette d'un disque.

Dans cette question on désigne par \mathcal{R} le disque ouvert $B(A; r)$.

I.2.1. Démontrer que si un point M appartient à \mathcal{R} et est différent de A , on a alors $n(M) = 1$.

I.2.2. Calculer $n(A)$.

I.2.3. Quel est le squelette de \mathcal{R} ?

I.3. Squelette d'un triangle.

Soit A, B et C trois points non alignés du plan Π . Un point du plan sera repéré par ses coordonnées barycentriques (α, β, γ) relativement aux points A, B et C , normalisées par $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Dans cette question, on désigne par \mathcal{R} l'ensemble des points intérieurs au triangle ABC , c'est-à-dire l'ensemble des points de coordonnées barycentriques strictement positives. On notera $a = d(B, C)$, $b = d(C, A)$, $c = d(A, B)$ et S l'aire du triangle. On admet que $\partial\mathcal{R} =]A, B[\cup]B, C[\cup]C, A[$.

I.3.1. Soit M un point de \mathcal{R} de coordonnées barycentriques (α, β, γ) relativement aux points A, B et C . Exprimer la distance de M à la droite (B, C) en fonction de a, α et S .

I.3.2. En déduire les coordonnées barycentriques du point I , centre du cercle inscrit dans le triangle ABC .

I.3.3. Démontrer qu'un point M appartient à l'intérieur du triangle IBC si et seulement si

$$\frac{\alpha}{a} < \min\left(\frac{\beta}{b}, \frac{\gamma}{c}\right).$$

I.3.4. Démontrer que, si M appartient à l'intérieur du triangle IBC , le produit scalaire $\overline{BM} \cdot \overline{BC}$ est strictement positif. En déduire que $d(M, [B, C]) = d(M, (B, C))$ et que $n(M) = 1$.

I.3.5. Décrire le squelette de \mathcal{R} .

I.4. Squelette d'un parallélogramme.

On suppose le plan Π orienté. Soit A, B, C et D quatre points de Π tels que $\overline{AB} = \overline{DC}$, $d(A, B) = 2d(A, D)$, $(\overline{BC}, \overline{BA}) = 2(\overline{AB}, \overline{AD})$ et $\sin(\overline{AB}, \overline{AD}) > 0$.

I.4.1. Déterminer une mesure des angles $(\overline{AB}, \overline{AD})$ et $(\overline{BA}, \overline{BD})$.

Dessiner un parallélogramme $ABCD$ en indiquant l'orientation sur la figure.

I.4.2. Soit \mathcal{R} l'ensemble des points intérieurs au parallélogramme $ABCD$. On admet que $\partial\mathcal{R} = [A, B] \cup [B, C] \cup [C, D] \cup [D, A]$.

Décrire $\text{sq}(\mathcal{R})$ sans expliciter votre démonstration et représenter $\text{sq}(\mathcal{R})$ sur la figure de la question précédente.

I.4.3. $\text{sq}(\mathcal{R})$ est une réunion de 5 segments, privée de 4 points. Calculer la longueur totale de $\text{sq}(\mathcal{R})$ en fonction de $l = d(A, D)$.

I.5. Squelette d'un domaine elliptique.

Soit a et b deux nombres réels tels que $a > b > 0$. On désigne par \mathcal{R} l'ensemble des points M de Π dont les coordonnées (x, y) vérifient $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$. On admet que $\partial\mathcal{R}$ est l'ellipse de centre O , de demi-grand axe a et de demi-petit axe b admettant l'axe des x comme axe principal. On désigne par A et A' les sommets du grand axe de cette ellipse, l'abscisse de A étant positive.

I.5.1. Déterminer le lieu géométrique \mathcal{V} des points d'intersection de la droite (A, A') avec la normale en M à $\partial\mathcal{R}$ quand M décrit $\partial\mathcal{R} - \{A, A'\}$.

I.5.2. Démontrer que $\text{sq}(\mathcal{R})$ est un segment privé de ses extrémités.

I.6. Squelette d'une tête de chat.

Soit B le point de coordonnées $(0, 1)$ et U le point de coordonnées $(0, 2)$. Les tangentes issues de U au cercle $C(O; 1)$ rencontrent $C(O; 1)$ en T et T' , l'abscisse de T étant positive. La parallèle à la droite (U, T') menée de B coupe (U, T) en K et la parallèle à (U, T) menée de B coupe (U, T') en K' . On désigne par Γ la courbe simple fermée constituée par les segments $[T', K']$, $[K', B]$, $[B, K]$, $[K, T]$ et l'arc du cercle $C(O; 1)$ d'extrémités T et T' ne contenant pas B . On note \mathcal{R} la région ouverte intérieure à Γ et on admet que $\partial\mathcal{R} = \Gamma$.

Tournez la page S.V.P.

- I.6.1. Démontrer que $\text{sq}(\mathcal{R})$ est la réunion de deux segments et de deux arcs de conique, privée de 2 points. Déterminer les excentricités, les foyers et les directrices des deux coniques.
- I.6.2. Démontrer que $\text{sq}(\mathcal{R})$ admet une tangente en chacun de ses points, sauf un.
- I.6.3. Calculer la longueur de $\text{sq}(\mathcal{R})$ à 10^{-4} près.

II. UNE PROPRIÉTÉ DES SQUELETTES

Soit \mathcal{R} un ouvert borné non vide de Π .

II.1. Disques contenus dans \mathcal{R} .

- II.1.1. Démontrer que $\partial\mathcal{R}$ est un compact non vide, que $\mathcal{R} \cap \partial\mathcal{R}$ est vide et que la fermeture $\bar{\mathcal{R}}$ de \mathcal{R} est compacte et est égale à $\mathcal{R} \cup \partial\mathcal{R}$.
- II.1.2. On note φ l'application de Π dans l'ensemble des réels, définie par $\varphi(M) = d(M, \partial\mathcal{R})$. Démontrer que φ est continue.
- II.1.3. Démontrer que, pour tout point M de \mathcal{R} , la boule ouverte $B(M; \varphi(M))$ est contenue dans \mathcal{R} .
- II.1.4. Démontrer que, pour tout point M de \mathcal{R} et tout réel $r > 0$, si la boule fermée $\bar{B}(M; r)$ est contenue dans \mathcal{R} , alors $\varphi(M) > r$.
- En déduire que, pour tout point M de \mathcal{R} , la boule fermée $\bar{B}(M; \varphi(M))$ rencontre $\partial\mathcal{R}$ en au moins un point F .

II.2. Comment retrouver \mathcal{R} à partir de son squelette et de l'application φ ?

Soit M_0 un point fixé de \mathcal{R} et r un réel strictement positif tel que $\bar{B}(M_0; r) \subset \mathcal{R}$. On note \mathcal{R}_0 le sous-ensemble des points M de \mathcal{R} tels que $\bar{B}(M_0; r) \subset \bar{B}(M; \varphi(M))$.

- II.2.1. On suppose que M appartient à \mathcal{R}_0 et que $\bar{B}(M; \varphi(M)) \cap \partial\mathcal{R}$ ne contient qu'un seul point F . Démontrer que, quel que soit le réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout point P de $C(M; \varphi(M))$ vérifiant $d(F, P) \geq \varepsilon$, on ait $\varphi(P) > \alpha$.
- En déduire, en choisissant ε assez petit, qu'il existe un point M' de la demi-droite d'origine F passant par M , appartenant à \mathcal{R}_0 et tel que $\varphi(M') > \varphi(M)$.
- II.2.2. Démontrer que la restriction de l'application φ à \mathcal{R}_0 atteint sa borne supérieure en un point S_0 de \mathcal{R}_0 .
- II.2.3. Démontrer que S_0 appartient à $\text{sq}(\mathcal{R})$.
- II.2.4. Démontrer que $\mathcal{R} = \bigcup_{S \in \text{sq}(\mathcal{R})} B(S; \varphi(S))$.