SESSION DE 1993

concours externe de recrutement de professeurs certifiés

section : mathématiques

deuxième composition de mathématiques

Durée : 5 heures

L'usage d'instruments de calcul, en particulier d'une calculatrice électronique de poche — éventuellement programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Notations et objectifs du problème

Dans tout le problème, $\mathscr{E}$ désigne l'espace affine euclidien orienté de dimension 3, E l'espace vectoriel associé, γ un élément de l'intervalle $[0, 1[$, n un entier supérieur ou égal à 3, $\mathscr{R} = (O\,;\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un repère orthonormé direct de $\mathscr{E}$. Les coordonnées des points de $\mathscr{E}$ sont définies par rapport à ce repère.

On dit qu'une paire $\{d_1, d_2\}$ de deux droites de $\mathscr{E}$ est de rapport γ s'il existe des vecteurs directeurs unitaires $\vec{u}_1$ de d_1 et $\vec{u}_2$ de d_2 dont le produit scalaire $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2$ est égal à γ.

On appelle gerbe d'ordre n et de rapport γ tout ensemble G de n droites de $\mathscr{E}$, concourantes en un point Ω, et telles que toute paire formée de deux droites de G soit de rapport γ. Le point Ω est appelé centre de la gerbe G.

Les objectifs du problème sont la détermination de tous les couples (n, γ) pour lesquels il existe au moins une gerbe d'ordre n et de rapport γ et, pour chaque couple de ce type, la classification à une isométrie près de toutes les gerbes d'ordre n et de rapport γ.

Tournez la page S.V.P.

A. ÉTUDE PRÉLIMINAIRE

A.1. Gerbes isométriques.

A.1.1. Soit $G = \{d_1, ..., d_n\}$ une gerbe d'ordre n et de rapport γ, et soit f une isométrie de $\mathscr{E}$.
Montrer que l'ensemble G′ des n droites $d'_1 = f(d_1), ..., d'_n = f(d_n)$ est une gerbe dont on précisera le rapport.
La gerbe G′ est appelée la gerbe image de G par l'isométrie f.
Convention : Les gerbes images de G par les isométries de $\mathscr{E}$ s'appellent les gerbes isométriques à G.

A.1.2. Étant donné deux gerbes G et G′, montrer que, si G′ est isométrique à G, alors G est isométrique à G′. On dira, dans ce cas, que G et G′ sont isométriques.

A.2. Exemples de gerbes d'ordre 3.

A.2.1. Soient d_1 et d_2 deux droites de $\mathscr{E}$, de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. Montrer que la paire $\{d_1, d_2\}$ est de rapport γ si, et seulement si, on a : $|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2| = \gamma \|\vec{u}_1\| \, \|\vec{u}_2\|$.

A.2.2. Soit ABCD un tétraèdre régulier de $\mathscr{E}$. Montrer que les trois droites (AB), (AC), (AD) forment une gerbe dont on précisera le rapport.

A.2.3. Soit, dans $\mathscr{E}$, un triangle équilatéral ABC de centre O. Montrer que les trois droites (OA), (OB), (OC) forment une gerbe dont on précisera le rapport.

A.2.4. L'énoncé suivant : « Si G et G′ sont deux gerbes de même ordre et de même rapport, alors G′ est isométrique à G » est-il exact ?

A.2.5. On considère le point I de coordonnées (1, 0, 0), et ses images J et K par les rotations d'axe $(O\,;\vec{e}_3)$, orienté dans le sens de $\vec{e}_3$, d'angles $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$ respectivement.

a. Déterminer les coordonnées de J et de K.

b. Soit un nombre réel h et Ω le point de coordonnées $(0, 0, h)$.

Montrer que les vecteurs $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{\Omega I}}{\|\overrightarrow{\Omega I}\|}$, $\vec{v} = \frac{\overrightarrow{\Omega J}}{\|\overrightarrow{\Omega J}\|}$, $\vec{w} = \frac{\overrightarrow{\Omega K}}{\|\overrightarrow{\Omega K}\|}$ vérifient :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{u} = \varphi(h),$$

où $\varphi(h)$ est un nombre réel qu'on exprimera en fonction de h.

c. Construire le tableau des variations de la fonction φ en précisant les limites aux bornes. En déduire l'image de φ.

d. Montrer que, pour chaque choix du réel h, les trois droites (ΩI), (ΩJ), (ΩK) forment une gerbe dont on précisera le rapport.

e. On considère trois vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{v}_1$ et $\vec{w}_1$ qui sont des vecteurs directeurs unitaires de (ΩI), (ΩJ) et (ΩK) respectivement. Montrer que, si $\vec{u}_1 \cdot \vec{v}_1 = \vec{v}_1 \cdot \vec{w}_1 = \vec{w}_1 \cdot \vec{u}_1 = c$, alors $c = \varphi(h)$.

f. Soit (h, h') un couple de deux nombres réels et soient Ω et Ω' les points de coordonnées respectives $(0, 0, h)$ et $(0, 0, h')$. Montrer que la gerbe $G' = \{(\Omega' I), (\Omega' J), (\Omega' K)\}$ est isométrique à la gerbe $G = \{(\Omega I), (\Omega J), (\Omega K)\}$ si, et seulement si, $\varphi(h') = \varphi(h)$.

A.3. **Exemples de gerbes d'ordre 4, 5 et 6.**

A.3.1. On considère les points A, B, C, D de coordonnées respectives (1, 1, 1), (− 1, 1, 1), (1, − 1, 1), (1, 1, −1). Montrer que les quatre droites (OA), (OB), (OC), (OD) forment une gerbe dont on précisera le rapport.

A.3.2. On pose $z = e^{2i\pi/5}$ et on note A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 les points du plan $(O ; \vec{e_1}, \vec{e_2})$, d'affixes respectives 1, z, z^2, z^3, z^4 par rapport au repère $(O ; \vec{e_1}, \vec{e_2})$ de ce plan.

a. Calculer la somme $z^{-2} + z^{-1} + 1 + z + z^2$ et en déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.
Montrer qu'on a $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

b. En prenant l'unité de longueur égale à 4 centimètres, construire à la règle et au compas la figure formée par les points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Justifier cette construction au moyen des résultats de la question *a.*

c. Soit Ω le point de coordonnées (0, 0, 1/2). Vérifier que les six droites (ΩO), (ΩA_1), (ΩA_2), (ΩA_3), (ΩA_4), (ΩA_5) forment une gerbe dont on précisera le rapport (on pourra remarquer que, pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 5$, on a la relation $\overrightarrow{\Omega A_i} \cdot \overrightarrow{\Omega A_j} = \overrightarrow{OA_i} \cdot \overrightarrow{OA_j} + \overrightarrow{O\Omega}^2$).
En déduire l'existence d'au moins une gerbe d'ordre 5, puis l'existence d'au moins une gerbe d'ordre 4 non isométrique à celle qui a été construite en A.3.1.

B. GERBES D'ORDRE 3

B.1. **Matrice de Gram d'une famille de trois vecteurs.**

On appelle matrice de Gram d'une famille $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ de trois vecteurs de E, la matrice $M = (a_{ij})$, $1 \leqslant i \leqslant 3$ et $1 \leqslant j \leqslant 3$, des produits scalaires $a_{ij} = \vec{u_i} \cdot \vec{u_j}$.

B.1.1. Soit $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et soit $\vec{v}$ le vecteur $x_1\vec{u_1} + x_2\vec{u_2} + x_3\vec{u_3}$.

Démontrer les égalités matricielles suivantes où $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$:

$$MX = \begin{bmatrix} \vec{u_1} \cdot \vec{v} \\ \vec{u_2} \cdot \vec{v} \\ \vec{u_3} \cdot \vec{v} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tXMX = \|\vec{v}\|^2.$$

En déduire que $MX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ si, et seulement si, $\vec{v} = \vec{0}$, puis que M est inversible si, et seulement si, la famille $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ est libre.

B.1.2. Quelles propriétés de la matrice M permettent d'affirmer que toutes ses valeurs propres sont réelles ? Déduire de B.1.1. que ces valeurs propres sont positives ou nulles.

B.2. **Automorphismes orthogonaux transformant une famille libre donnée en une famille donnée.**

B.2.1. Soient $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ et $(\vec{u'_1}, \vec{u'_2}, \vec{u'_3})$ deux familles de trois vecteurs de E, dont la première est libre. On suppose que, pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 3$, on a $\vec{u'_i} \cdot \vec{u'_j} = \vec{u_i} \cdot \vec{u_j}$. Montrer qu'il existe un automorphisme orthogonal σ de E tel que, pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, on ait $\sigma(\vec{u_i}) = \vec{u'_i}$.
σ est-il unique ?

B.2.2. Soient $(\vec{u_1}, \vec{u_2})$ et $(\vec{u'_1}, \vec{u'_2})$ deux familles de deux vecteurs de E, dont la première est libre. On suppose que, pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 2$, on a $\vec{u'_i} \cdot \vec{u'_j} = \vec{u_i} \cdot \vec{u_j}$. Montrer qu'il existe un automorphisme orthogonal σ de E tel que, pour $1 \leqslant i \leqslant 2$, on ait $\sigma(\vec{u_i}) = \vec{u'_i}$.
σ est-il unique ?

Tournez la page S.V.P.

B.3. **Classification des gerbes d'ordre 3.**

B.3.1. Soit $G = \{d_1, d_2, d_3\}$ une gerbe d'ordre 3 et de rapport γ. Soit $\vec{u}_1$ un vecteur directeur unitaire de d_1.

a. Montrer qu'il existe des vecteurs directeurs unitaires $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ des droites d_2 et d_3 tels que $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1$.

Dans la suite de la question B.3.1., on suppose $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ choisis de cette manière, on pose :

$$c = \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1 \quad \text{et} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & c & c \\ c & 1 & c \\ c & c & 1 \end{bmatrix}.$$

b. Déterminer les valeurs propres de M, et en déduire qu'on a : $c \geqslant -\dfrac{1}{2}$.

c. Si $c > -\dfrac{1}{2}$, montrer que G est isométrique à l'une des gerbes construites à la question A.2.5.

d. On suppose $c = -\dfrac{1}{2}$. Montrer que $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = \vec{0}$ (on pourra utiliser B.1.1. avec $x_1 = x_2 = x_3 = 1$). En déduire que G est encore isométrique à l'une des gerbes construites à la question A.2.5.

B.3.2. Quel est l'ensemble de tous les réels $\gamma \in [0, 1[$ pour lesquels il existe au moins une gerbe d'ordre 3 et de rapport γ ?

Pour chaque γ appartenant à cet ensemble, déterminer une famille de gerbes d'ordre 3 et de rapport γ, deux à deux non isométriques, et telles que toute gerbe d'ordre 3 et de rapport γ soit isométrique à l'une d'entre elles (on pourra distinguer les cas $\gamma \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right]$ et $\gamma \notin \left]0, \dfrac{1}{2}\right]$).

C. GERBES D'ORDRE SUPÉRIEUR OU ÉGAL À 4

C.1. **Groupes finis de rotations de même axe.**

Dans toute cette partie C.1., m désigne un entier supérieur ou égal à 1.

C.1.1. On note T le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1. On considère une droite d de l'espace.

a. Montrer que T contient un unique sous-groupe d'ordre m dont on précisera les éléments.

b. Définir, sans démonstration, un isomorphisme du groupe T sur le groupe R_d de toutes les rotations d'axe d. En déduire que R_d contient un unique sous-groupe d'ordre m dont on précisera les éléments.

On note ce sous-groupe $R_{d,m}$.

c. Soit f une isométrie de $\mathscr{E}$, montrer que :

$$\{f \circ \sigma \circ f^{-1} \mid \sigma \in R_{d,m}\} = R_{d',m}$$

où d' est une droite qu'on précisera.

C.1.2. Soient $F = \{d_0, d_1, \ldots, d_m\}$, $F' = \{d'_0, d'_1, \ldots, d'_m\}$ deux ensembles de $m + 1$ droites de $\mathscr{E}$. On suppose que $\{d_1, \ldots, d_m\} = \{\sigma(d_1) \mid \sigma \in R_{d_0,m}\}$, et que $\{d'_1, \ldots, d'_m\} = \{\tau(d'_1) \mid \tau \in R_{d'_0,m}\}$.
Soit f une isométrie de $\mathscr{E}$ qui transforme d_0 en d'_0 et d_1 en d'_1.

Déduire de C.1.1.*c.* que F′ est l'ensemble des images par f de toutes les droites de F.

C.1.3. Soit ρ la transformation de $\mathscr{E}$ définie analytiquement par les formules : $x' = z$, $y' = x$, $z' = y$. Montrer que $\{\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}, \rho, \rho^2\} = R_{d,3}$ où d est une droite qu'on précisera.

C.2. **Étude des gerbes d'ordre n, $n \geqslant 4$.**

Dans toute cette partie, on considère un entier n, $n \geqslant 4$, et une gerbe $G = \{d_0, d_1, \ldots, d_m\}$ d'ordre n, de centre Ω, de rapport γ, avec $m = n - 1$.

Soit $\vec{u}_0$ un vecteur directeur unitaire de d_0.

C.2.1. Montrer que γ est différent de 0, et qu'il existe, pour chaque entier k, $1 \leqslant k \leqslant m$, un unique vecteur directeur unitaire $\vec{u}_k$ de d_k tel que $\vec{u}_0 \cdot \vec{u}_k = \gamma$.

Dans tout ce qui suit, on note $A_0, A_1, \ldots, A_m$ les points de $\mathscr{E}$ définis, pour $0 \leqslant k \leqslant m$, par $\overrightarrow{\Omega A_k} = \vec{u}_k$.

On note I le point de d_0 défini par $\overrightarrow{\Omega I} = \gamma \vec{u}_0$ et Π le plan perpendiculaire en I à d_0.

C.2.2. Montrer que $A_1, \ldots, A_m$ appartiennent au plan Π. Vérifier qu'on a, pour $1 \leqslant k \leqslant l \leqslant m$, $\overrightarrow{IA_k} \cdot \overrightarrow{IA_l} = \vec{u}_k \cdot \vec{u}_l - \gamma^2$. En déduire que $A_1, \ldots, A_m$ appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ du plan Π, dont on précisera le centre et le rayon.

Pour chaque entier k, $1 \leqslant k \leqslant m$, on note S_k l'ensemble constitué de A_k et de tous les points M du cercle $\mathscr{C}$ tels que $\overrightarrow{IA_k} \cdot \overrightarrow{IM}$ soit égal à $\gamma - \gamma^2$ ou à $-\gamma - \gamma^2$.

C.2.3. En observant que l'ensemble $S = \{A_1, \ldots, A_m\}$ est contenu dans chaque S_k, montrer qu'on a $n \leqslant 6$.

C.2.4. Vérifier que, quitte à modifier l'indexation des droites d_k, $1 \leqslant k \leqslant m$, on peut supposer $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3$.

On suppose, dans toute la suite de la question C.2., que cette condition est satisfaite. On oriente le plan Π et on note α une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{IA_1}, \overrightarrow{IA_2}})$.

C.2.5. Déterminer, en fonction de α, une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{IA_1}, \overrightarrow{IA_3}})$, puis une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{IA_2}, \overrightarrow{IA_3}})$. En déduire que les nombres $\cos \alpha$ et $\cos(2\alpha)$ appartiennent à l'ensemble $\left\{ \dfrac{\gamma}{1+\gamma}, -\dfrac{\gamma}{1-\gamma} \right\}$.

C.2.6. On suppose $\cos(2\alpha) = \cos \alpha$.

a. Montrer que le triangle $A_1A_2A_3$ est équilatéral et que $\gamma = \dfrac{1}{3}$.

b. On suppose que S contient un point M différent de A_1, A_2 et A_3. Montrer que $\overrightarrow{IA_1} \cdot \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IA_2} \cdot \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IA_3} \cdot \overrightarrow{IM} = \dfrac{2}{9}$. En déduire une contradiction en considérant la somme $\overrightarrow{IA_1} \cdot \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IA_2} \cdot \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IA_3} \cdot \overrightarrow{IM}$.

c. Montrer que G est isométrique à la gerbe construite en A.3.1. (on pourra utiliser C.1.2. et C.1.3.)

C.2.7. On suppose $\cos(2\alpha) \neq \cos \alpha$.

a. On pose $a = \dfrac{\gamma}{1+\gamma}$ et $b = -\dfrac{\gamma}{1-\gamma}$. Comparer $a + b$ et ab. En déduire que $\cos(3\alpha) = \cos(2\alpha)$.

b. Montrer que S_1 est l'ensemble des sommets d'un pentagone régulier. Calculer γ (on pourra utiliser A.3.2.*a.*).

C.3. **Classification des gerbes d'ordre n, $n \geqslant 4$.**

C.3.1. Déterminer tous les couples (n, γ), avec $n \geqslant 4$, pour lesquels il existe au moins une gerbe d'ordre n et de rapport γ.

C.3.2. Soit G une gerbe d'ordre 6.

a. Soient (d_0, d_1) et (d'_0, d'_1) deux couples constitués chacun de deux droites distinctes de G. Montrer qu'il existe une isométrie f de $\mathscr{E}$ qui transforme d_0 en d'_0 et d_1 en d'_1.
Quelle est la gerbe image de G par f?

b. Étant donné un entier k, $4 \leqslant k \leqslant 5$, montrer que toutes les gerbes d'ordre k contenues dans G sont isométriques à l'une d'entre elles.
En est-il de même lorsque $k = 3$?

C.3.3. Pour chaque couple (n, γ) trouvé en C.3.1., montrer que toutes les gerbes d'ordre n et de rapport γ sont isométriques à l'une d'entre elles.