Fiche d'exercices n°2. Homothéties-translations. Sous-espaces affines.

Tous les résultats précédés d'un $(*)$ sont du cours: ils doivent être connus et peuvent être réutilisés.

Dans ce qui suit, E désigne toujours un espace affine d'espace vectoriel sous-jacent $\vec{E}$.

Homothéties-translations.

Exercice 1 Trapèzes et homothéties-translations (cf. 3)).

Etablir les résultats suivants.

1) $(*)$ Une application $f \in HT(E)$ envoie toute droite de E (tout sous-espace de E) sur une droite parallèle (sur un sous-espace parallèle).

2) $(*)$ Soit $f \in HT(E)$ quelconque et $a \in E$. Alors toute droite passant par a et $f(a)$ est invariante par f.

3) $(*)$ Soient a, a', b, b' quatre points de E avec $a \neq b$ et $a' \neq b'$. Alors $(ab) \parallel (a'b') \iff$ il existe un $f \in HT(E)$ tel que $f(a) = a'$ et $f(b) = b'$. Ce f est alors unique et c'est une translation si et seulement si $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{a'b'}$.

4) Applications: un théorème de Desargues. Soient a, b, c (resp: a', b', c') trois points non alignés. On suppose $a \neq a'$, $b \neq b'$, $c \neq c'$ et $(ab) \parallel (a'b')$, $(ac) \parallel (a'c')$, $(bc) \parallel (b'c')$. Alors les droites $(aa'), (bb'), (cc')$ sont parallèles ou concourantes.

Exercice 2 Actions naturelles de $HT(E)$ (pour se familiariser avec les actions de groupes).

1) Montrer que $HT(E)$ agit transitivement sur E (i.e. qu'il n'y a qu'une orbite). Décrire les caractéristiques de l'action de $T(E)$ sur E (orbites, stabilisateurs).

2) Montrer que $HT(E)$ agit sur l'ensemble des couples de points distincts $(a, b) \in E^2$ $(a \neq b)$. Déterminer les orbites et montrer que l'action est libre (c'est à dire que tous les stabilisateurs sont réduits à $\{\mathrm{id}_E\}$).

3) Montrer que $HT(E)$ agit sur l'ensemble des repères affines de E. Déterminer l'orbite et le stabilisateur d'un repère.

Remarques: derrière tout énoncé faisant intervenir des droites parallèles se cache $HT(E)$, à toute propriété d'une action d'un groupe correspond un théorème de géométrie.

Exercice 3 Droites stables par une homothétie-translation.

1) Préliminaire. Soit X un ensemble, A une partie de X et $f : X \to X$ une application. On dit que f préserve A, ou que A est *stable par* f, si $f(A) \subset A$. Lorsque E est un espace affine et $f : E \to E$ une homothétie-translation, montrer qu'une droite D est stable par f $\iff$ $f(D) = D$ (autrement dit: D est *invariante*).

Remarque: une demi-droite peut être stable par translation, mais non invariante.

2) Dans cette question on suppose que $f \in HT(E)$ et que f préserve deux droites distinctes D et D' et que $f \neq \mathrm{id}_E$.

2-a) Si D et D' sont sécantes en ω montrer que f est une homothétie fixant ω.

2-b) Si $D \cap D' = \emptyset$ montrer que f est une translation de vecteur $\vec{u} \in \vec{D} \cap \vec{D}'$. Quelles translations de l'espace préservent deux droites non coplanaires ?

3) En déduire que pour toute droite D:

$(*)$ une homothétie différente de l'identité de centre ω préserve $D \iff \omega \in D$.

$(*)$ une translation différente de l'identité de vecteur $\vec{u}$ préserve $D \iff \vec{u} \in \vec{D}$.

4) Montrer que l'ensemble des homothéties-translations de E préservant une droite D donnée est le sous-groupe de $HT(E)$ formé des translations de vecteur $\vec{u} \in \vec{D}$ et des homothéties de centre appartenant à D.

Exercice 4 (réciproque du 1) de l'exercice 1)

Soit $f : E \to E$ une application envoyant toute droite de E **sur** une droite parallèle. Etablir les points suivants:

1) Si f fixe un point p, alors elle préserve toutes les droites passant par p.

2) Si f fixe deux points distincts et $\dim(E) > 1$ alors $f = \mathrm{id}$.

3) Si $\dim(E) > 1$ alors $f \in HT(E)$.

Peut-on dire quelque chose de particulier sur f si $\dim(E) = 1$?

Sous-espaces affines.

Exercice 5

1) On considère $\mathbb{Z}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que x et y sont entiers relatifs$\}$. Déterminez $\overrightarrow{\mathbb{Z}^2_p}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}^2$ (on rappelle que pour toute partie X de E et tout point p on note $\vec{X}_p$ l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{pq}$, pour $q \in X$). La partie $\mathbb{Z}^2$ est-elle un sous-espace affine de $\mathbb{R}^2$?

Soit X une partie non vide d'un espace affine E. Montrer que les vectorialisés $\vec{X}_p$ sont des parties de $\vec{E}$ indépendantes de $p \in X$ si et seulement si $\exists p_0 \in X, \vec{X}_{p_0}$ est un sous-groupe de $(\vec{E}, +)$.

2) Montrer que la partie F ci-dessous est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x + y - z = 1 \text{ et } \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, (x, y, z) = (\lambda, \mu - \lambda, 2 - \mu)\}.$$

Montrer que $\{(1 - 2t, 3t - 2, -t), t \in \mathbb{R}\}$ est une droite affine parallèle à F.

Exercice 6

Soit F une partie non vide de E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:

i) F est un sous-espace affine;

ii) F est stable par toute homothétie centrée sur F;

iii) F est stable par toute translation de la forme $t_{\overrightarrow{ab}}$ avec $(a, b) \in F^2$ et $\exists \omega \in F$ tel que F est stable par toute homothétie de centre ω;

iv) les vectorialisés $\vec{F}_p$ sont indépendants de $p \in F$ et $\exists \omega \in F$ tel que F est stable par toute homothétie de centre ω.

Exercice 7

1) Montrer que deux sous-espaces affines F et F' de E sont parallèles si et seulement si $\exists \vec{u} \in \vec{E}$ tel que $t_{\vec{u}}(F) = F'$.

2) Si deux sous-espaces affines sont faiblement parallèles, alors, ou bien ils sont disjoints, ou bien l'un contient l'autre. Que dire dans $\mathbb{R}^3$ de $(x = y = 1)$ et $(z = x + y = 0)$?

$(*)$ 3) Montrer que deux hyperplans affines sont parallèles si et seulement s'ils sont égaux ou disjoints. Quel énoncé obtient-on si E est un plan affine ?

Exercice 8 Sous-espace affine de sous-espace affine.

Soit V un sous-espace affine de E, soit $\vec{V}$ sa direction vectorielle et soit $U \subset \vec{V}$ un sous-espace affine (ne passant pas ncessairement par 0). Montrer que pour tout $p \in V$ la partie $p + U$ est un sous-espace affine de E contenu dans V.

Equations cartésiennes.

Exercice 9

Soit E un plan affine, a un point de E et $(\vec{u},\vec{v})$ une base de $\vec{E}$. On pose $b = a + \vec{u}$ et $c = a + \vec{v}$.

1) Montrer que (b, a, c) est un repère affine de E, ainsi que (c, a, b).

2) Donner des équations cartésiennes des droites (ab), (ac), (bc) et $D = m + \mathbb{R}(3\vec{u} + \vec{v})$ dans le repère $\mathcal{R} = (a, b, c)$ (avec m le milieu de b, c).

3) Montrer que $\mathcal{R}' = (a + 2\vec{u} - \vec{v}, a + 3\vec{u}, a + 5\vec{u} - 3\vec{v})$ est encore un repère affine de E, et déterminer des équations cartésiennes de (ab), (ac), (bc) et D dans ce repère.

4) Pour tout point p de E calculer les coordonnées (x, y) de p dans $\mathcal{R}$ en fonction des coordonnées (x', y') dans $\mathcal{R}'$, et aussi (x', y') en fonction de (x, y). Retrouver alors des équations cartésiennes de (ab), (ac), (bc) et D dans $\mathcal{R}'$ en utilisant 2).
(Indication : on doit trouver $x = 2 + x' + 3y'$ et $y = -1 + x' - 2y'$.)

Exercice 10 L'équation dépend du repère.

Soit D une droite d'un plan affine E. Montrer qu'il existe deux repères affine $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ de E tels qu'une équation de D dans $\mathcal{R}_1$ soit $y = 0$ (vue dans $\mathcal{R}_1$, D est "horizontale") et une équation de D dans $\mathcal{R}_2$ soit $x + y = 1$ (vue dans $\mathcal{R}_2$, D est "antidiagonale").

Exercice 11

On suppose E de dimension 3 et rapporté à un repère affine $\mathcal{R} = (a, b, c, d)$.

$(*)$ 1) Soit P une partie de E; montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:

- P est un plan ;
- il existe des réels α, β, γ non tous nuls, et un réel δ, tels que P est l'ensemble des points m de E dont les coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans $\mathcal{R}$ satisfont $\alpha.x + \beta.y + \gamma.z = \delta$.

On dit alors que $\alpha.x + \beta.y + \gamma.z = \delta$ est *une équation cartésienne de P dans le repère $\mathcal{R}$*.

Enoncer et démontrer un résultat analogue pour les droites d'un plan affine rapporté à un repère.

2) Déterminer une équation cartésienne dans $\mathcal{R}$ du plan P passant par le point m de coordonnées $(1, 0, -1)$ dans $\mathcal{R}$, et de direction engendrée par $(\vec{u}, \vec{v})$, avec $\vec{u}$ (resp: $\vec{v}$) de coordonnées $(0, 1, 2)$ (resp: $(1, 1, 0)$) dans $\overrightarrow{\mathcal{R}}$.

3) Déterminer un système de deux équations cartésiennes de la droite D passant par p de coordonnées $(1, 0, -1)$, de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $(2, 1, -1)$.

Exercice 12

Soient $\mathcal{R} = (a, b, c, d)$ un repère affine d'un espace affine E de dimension 3. Soient (p, q, r) les points de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$.

1) Montrer que $\{p, q, r\}$ est contenu dans une unique droite affine D de E.
2) Déterminer un système d'équations cartésiennes dans $\mathcal{R}$ de D.

Exercice 13 Parallélisme ou concours

Pour $i = 1, 2, 3$, soit D_i une droite d'un plan affine E rapporté à un repère $\mathcal{R}$. On suppose que $a_i x + b_i y + c_i = 0$ est une équation cartésienne de D_i dans $\mathcal{R}$.

Montrer que D_1, D_2, D_3 sont parallèles ou concourantes si et seulement si le détermi-nant de la matrice $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ est nul.

Un peu de géométrie dans l'espace.

Exercice 14

Soit E un espace affine de dimension 3 rapporté à un repère $\mathcal{R}$. On considère un plan P et une droite D. On suppose que $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ est une équation cartésienne de P dans $\mathcal{R}$ et que $\begin{cases} a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ est un système d'équation de D. On introduit la matrice $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$.

Montrer que M est de rang au moins 2, avec égalité si et seulement si D est faiblement parallèle à P. Montrer que si $\det M \neq 0$ alors $P \cap D$ est réduit à un point.

Exercice 15 Barycentres dans l'espace.

Soit E un espace affine de dimension 3 et D_1, D_2, D_3 trois droites concourantes non coplanaires de E. On note Π_1 le sous-espace affine engendré par $D_2 \cup D_3$; on définit de même Π_2, Π_3.

Montrer que pour tout point $m \in E \setminus (\Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \Pi_3)$ il existe un unique triplet de points $(a, b, c) \in D_1 \times D_2 \times D_3$ tel que m est l'isobarycentre (a, b, c). Montrer que quand m varie sur une droite passant par le point de concours des D_i, la direction vectorielle de $\mathrm{Aff}(\{a, b, c\})$ ne change pas.

Exercice 16 Desargues dans l'espace.

Soit E un espace affine de dimension 3. Considérons six points a, b, c, a', b', c' **non coplanaires** de E, avec a, b, c non alignés, a', b', c' non alignés, a, b, a', b' contenus dans un plan C, a, c, a', c' contenus dans un plan B, b, c, b', c' contenus dans un plan A.

1) Montrer que $A \cap B = (cc')$, $A \cap C = (bb')$, $B \cap C = (aa')$.

2) Montrer que les lignes de fuite $(aa'), (bb'), (cc')$ sont parallèles ou concourantes.

3) On suppose que $(ab) \cap (a'b') = \{c''\}$, $(ac) \cap (a'c') = \{b''\}$, $(bc) \cap (b'c') = \{a''\}$. Montrer que les points a'', b'', c'' sont alignés.