Fiche d'exercices n°1. Coordonnées, barycentres.

Tous les résultats précédés d'un $(*)$ sont du cours: ils doivent être connus et peuvent être réutilisés.

Dans ce qui suit, E désigne toujours un espace affine d'espace vectoriel sous-jacent $\vec{E}$.

Repères et coordonnées.

Exercice 1

Dans l'espace affine $E = \mathbb{R}^2$ on considère les trois points $p = (2, 3), q = (3, 4), r = (0, 4)$.

1) Vérifier que (p, q, r) est un repère affine.

2) Quelle sont les coordonnées de $\omega = (0, 0)$ dans ce repère ? de $(2, 3)$?

3) Déterminer l'unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que le barycentre g de $(\omega, \alpha), (p, 1-\alpha)$ soit aligné avec q, r. Pour cette valeur de α, quel point g de $\mathbb{R}^2$ trouve t-on ? quelles sont ses coordonnées dans (p, q, r) ?

Exercice 2 Alignement en coordonnées.

Soit E un plan affine, rapporté à un repère cartésien $\mathcal{R} = (\omega; \vec{u}, \vec{v})$. On considère trois points a_1, a_2, a_3 de P, et on note $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ leurs coordonnées dans $\mathcal{R}$.

Montrer que a_1, a_2, a_3 sont alignés $\iff$ le déterminant de la matrice suivante est nul:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

$(*)$ **Exercice 3** Effet d'un changement de repère sur les coordonnées cartésiennes.

On suppose E de dimension 3. On considère deux repères affines $\mathcal{R} = (a, b, c, d)$ et $\mathcal{R}' = (a', b', c', d')$. Pour un point $m \in E$ ou un vecteur $\vec{u}$ de $\vec{E}$, on note $X(m)$ ou $X(\vec{u})$ (resp. $X'(m)$ ou $X'(\vec{u})$) le vecteur colonne des coordonnées cartésiennes de m ou $\vec{u}$ dans $\mathcal{R}$ ou $\vec{\mathcal{R}}$ (resp. $\mathcal{R}'$ ou $\vec{\mathcal{R}}'$). Enfin on introduit la matrice A de passage de $\vec{\mathcal{R}}$ à $\vec{\mathcal{R}}'$, i.e la matrice des coordonnées des vecteurs de $\vec{\mathcal{R}}'$ dans la base $\vec{\mathcal{R}}$.

1) Rappeler la formule liant $X(\vec{u})$, $X'(\vec{u})$ et A.

2) Montrer que $X(m) = A.X'(m) + B$, où $B = X(a')$.

ATTENTION !

Un point est repéré par ses coordonnées, mais il n'est pas égal à ses coordonnées ! En effet quand le repère change les coordonnées changent aussi - mais pas le point.

Exercice 4 Homothétie-translation en coordonnées.

Soit $\mathcal{R} = (a_0, a_1, \cdots, a_n)$ un repère affine de E et $k \in \mathbb{R}^*$ un réel.

Montrer qu'une fonction $f : E \mapsto E$ est une homothétie-translation de rapport k si et seulement s'il existe $(b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que pour tout point $m \in E$ on ait $x'_i = k.x_i + b_i$ (avec $(x_1, \cdots, x_n)$ et $(x'_1, \cdots, x'_n)$ les coordonnées cartésiennes dans $\mathcal{R}$ de m et de son image m' par f).

Lorsque la condition ci-dessus est remplie et $k \neq 1$ (resp: $k = 1$), déterminer les coordonnées du centre de f (resp: du vecteur de f).

Barycentres, coordonnées barycentriques.

Exercice 5 Dans un espace vectoriel $\vec{E}$ muni de sa structure naturelle d'espace affine, calculer l'isobarycentre de $\vec{0}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Exercice 6 On se place dans l'espace affine $E = \mathbb{R}^2$. On prend $p_1 = (x_1, y_1), \ldots, p_n = (x_n, y_n)$. On suppose chaque p_i affecté d'une masse μ_i telle que $M = \sum_{i=1}^{i=n} \mu_i \neq 0$.

Exprimer le barycentre des (p_i, μ_i) en fonction des x_i, y_i, μ_i et de M (on notera l'analogie avec une formule de moyenne - ou d'espérance.) Montrer que si $M = 1$ alors $g = \sum_{i=1}^{i=n} \mu_i p_i$.

Exercice 7 Coordonnées barycentriques dans un plan.

Soit E un plan affine rapporté à un repère cartésien $\mathcal{R} = (a; \overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac})$ (de repère affine associé (a, b, c)). Par définition les *coordonnées barycentriques d'un point m de E dans* (a, b, c) sont $\alpha(m) = 1 - x - y, \beta(m) = x, \gamma(m) = y$, où (x, y) sont les coordonnées cartésiennes de m dans $(a; \overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac})$.

1) Montrer que l'application $f : m \mapsto (\alpha(m), \beta(m), \gamma(m))$ réalise une bijection de E sur le plan affine $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + y + z = 1$ (ceci justifie l'appellation de *coordonnées*).

2) Soit $t = (\alpha, \beta, \gamma)$ un triplet de $\mathcal{P}$ et soit $m \in E$. Montrer que $f(m) = t \iff m$ est barycentre de $((a, \alpha), (b, \beta), (c, \gamma))$ (d'où le nom des coordonnées).

$(*)$ 3) Déduire de ce qui précède que tout point m de E est barycentre normalisé de (a, b, c), et ce pour une unique pondération qu'on exprimera en fonction des coordonnées cartésiennes de m.

4) Application numérique. Exprimer le point $m\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ comme barycentre de a, b, c. Quelles sont les coordonnées cartésiennes du barycentre g de $(a, 1), (b, 2), (c, 3)$ dans le repère (a, b, c) ?

Exercice 8

Soient a, b, c trois points non alignés d'un plan affine E et g un point de E non sur $(ab) \cup (ac) \cup (bc)$. On note α, β, γ les coordonnées barycentriques de g dans le repère (a, b, c).

$(*)$ 1) Montrer que g non sur $(ab) \cup (ac) \cup (bc) \iff \alpha$, β et γ sont non nuls.

$(*)$ 2) Montrer que (ag) est sécante à (bc), (bg) est sécante à (ac) et (cg) est sécante à (ab) $\iff \alpha \neq 1$, $\beta \neq 1$ et $\gamma \neq 1$ (condition (C) sur les coordonnées barycentriques).

Dans les questions 3) et 4) on suppose (C) remplie et on note p, q, r les points d'intersection de (ag) avec (bc), (bg) avec (ac) et (cg) avec (ab).

3) On suppose $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \neq 0$ et on note g' le barycentre de $\big((a, \frac{1}{\alpha}), (b, \frac{1}{\beta}), (c, \frac{1}{\gamma})\big)$.

a) Montrer que $g' \notin (ab) \cup (ac) \cup (bc)$ et que la condition (C) est remplie par g'.

b) On note p', q', r' les points d'intersection de (ag'), (bg'), (cg') avec (bc), (ac) et (ab). Montrer que les milieux de p et p', q et q', r et r' sont indépendants du point g de départ.

4) On suppose $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0$ et on note p', q', r' les symétriques de p, q, r par rapport aux milieux de b et c, a et c, a et b. Montrer que les droites (ap'), (bq') et (cr') sont parallèles.

5) Enoncer et démontrer un résultat de concourance ou parallélisme concernant des droites $(ax), (by), (cz)$ et des droites $(ax'), (by'), (cz')$ (où x, y, z sont des points de $(bc), (ac), (ab)$ et x', y', z' sont leurs symétriques par rapport aux milieux de b et c, a et c, a et b).

Exercice 9 Trapèze complet.

Soit a, b, c, d quatre points distincts d'un plan E. On suppose $(ad) \parallel (bc)$, $(ab) \cap (cd) = \{e\}$, $(ac) \cap (bd) = \{f\}$. On note p, q les milieux de $[a, d], [b, c]$. Montrer que e, f, p, q sont alignés.

Exercice 10 Quadrilatère complet.

Soit a, b, c, d quatre points distincts d'un plan E. On suppose $(ab) \cap (cd) = \{e\}$, $(ac) \cap (bd) = \{f\}$. Soient p, q, r les milieux de $[a, d], [b, c]$ et $[e, f]$. Montrer que p, q, r sont alignés. Lien avec l'exercice précédent ?

Barycentres dans un espace affine euclidien (c'est à dire en présence d'un produit scalaire).

$(*)$ **Exercice 11** Aires et barycentres.

Soit E un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Pour trois points p, q, r on note $\mathcal{A}(p, q, r)$ la moitié du déterminant dans $(\vec{u}, \vec{v})$ de la suite $(\overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pr})$. On appelle ce nombre *l'aire algébrique du triangle orienté* (p, q, r).

1) Vérifier que la valeur absolue de l'aire algébrique est l'aire géométrique usuelle.

Dans la suite, a, b, c désignent trois points non alignés de E.

2) Montrer que tout point m de E est barycentre du système :

$$\big((a, \mathcal{A}(m, b, c)), (b, \mathcal{A}(m, c, a)), (c, \mathcal{A}(m, a, b))\big).$$

Quelles sont les coordonnées barycentriques de m ?

Soit g l'isobarycentre de a, b, c. Que dire de l'aire (géométrique) des triangles gab, gbc et gca ?

$(*)$ **Exercice 12** Coordonnées barycentriques de points remarquables.

Dans la suite, a, b, c désignent trois points non alignés d'un plan affine euclidien E.

1) Montrer que le centre o du cercle circonscrit à abc est barycentre du système:
$\big((a, \sin 2\hat{a}), (b, \sin 2\hat{b}), (c, \sin 2\hat{c})\big)$.

2) Montrer que si abc n'est pas rectangle, l'orthocentre h de abc est barycentre du système $\big((a, \tan \hat{a}), (b, \tan \hat{b}), (c, \tan \hat{c})\big)$.

[indication: on montrera que $\mathcal{A}(h, b, c) = \mathcal{A}(a, b, c) \times \frac{bh}{ac}.\frac{ch}{ab}$; puis par des considérations de triangles semblables, on montrera que $\frac{bc}{ah} = \tan \hat{a}$]

N.B. on peut utiliser le 1) pour trouver une autre expression des coordonnées barycentriques de h, car h est le centre du cercle circonscrit à $a'b'c'$, image de abc par l'homothétie de centre g et de rapport -2; par unicité des coordonnées barycentriques on obtient une jolie formule:
$(\sin 2\hat{a} + \sin 2\hat{b} + \sin 2\hat{c}).(\tan \hat{a}, \tan \hat{b}, \tan \hat{c}) = ...$
$(\tan \hat{a} + \tan \hat{b} + \tan \hat{c}).(-\sin 2\hat{a} + \sin 2\hat{b} + \sin 2\hat{c}, \sin 2\hat{a} - \sin 2\hat{b} + \sin 2\hat{c}, \sin 2\hat{a} + \sin 2\hat{b} - \sin 2\hat{c})$.

3) Montrer que le centre du cercle inscrit est barycentre de $((a, bc), (b, ac), (c, ab))$.