Travail Dirigé sur Machine 1

Le D1Q2 pour une équation hyperbolique

We consider the following mono-dimensional hyperbolic equation

$$\partial_t \mathsf{u}(t,x) + \partial_x \varphi(\mathsf{u})(t,x) = 0, \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

where the flux φ is a smooth function on $\mathbb{R}$. A two-velocities lattice Boltzmann scheme is used to approximate the solution of this equation.

We consider $\mathscr{L} = \Delta x \mathbb{Z}$, a regular lattice in one dimension of space with typical mesh size Δx. The time step Δt is determined after the specification of the velocity scale λ by the relation $\Delta t = \frac{\Delta x}{\lambda}$.

For the scheme denoted by D_1Q_2, we introduce $\{c_0 = -\lambda, c_1 = \lambda\}$ the set of the two velocities. We have therefore that for each node x of $\mathscr{L}$, and each c_j, $j \in \{0,1\}$, the point $x + c_j \Delta t$ is also a node of the lattice $\mathscr{L}$. The aim of the D_1Q_2 scheme is to compute a particles distribution vector $\boldsymbol{f} = (f_0, f_1)^T$ on the lattice $\mathscr{L}$ at discrete values of time. The scheme splits into two phases for each time iteration : first, the relaxation phase that is local in space, and second, the transport phase for which an exact characteristic method is used.

The framework proposed by d'Humières reduced here to the two moments denoted by $\boldsymbol{m} = (m_0, m_1)^T$ and defined for each space point $x \in \mathscr{L}$ and for each time t by

$$m_0 = f_0 + f_1, \qquad m_1 = \lambda\left(-f_0 + f_1\right). \tag{2}$$

The matrix of the moments $\boldsymbol{M}$ such that $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{f}$ satisfies

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\lambda & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\lambda} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\lambda} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Let us now describe one time step of the scheme. The start point is the density vector $\boldsymbol{f}(t,x)$ in $x \in \mathscr{L}$ at time t, the moments are computed by

$$\boldsymbol{m}(t,x) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{f}(t,x). \tag{4}$$

The relaxation phase then reads

$$m_0^\star(t,x) = m_0(t,x), \qquad m_1^\star(t,x) = m_1(t,x) + s_1(m_1^{\mathrm{eq}}(t,x) - m_1(t,x)), \tag{5}$$

where s_1 is the relaxation parameter and m_1^{eq} the second moment at equilibrium that is a function of m_0. As a consequence, the first moment m_0 is conserved during the relaxation phase. The densities are then computed after the relaxation phase by

$$\boldsymbol{f}^\star(t,x) = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{m}^\star(t,x). \tag{6}$$

The transport phase finally reads

$$f_0(t+\Delta t, x) = f_0^\star(t, x+\Delta x), \quad f_1(t+\Delta t, x) = f_1^\star(t, x-\Delta x). \tag{7}$$

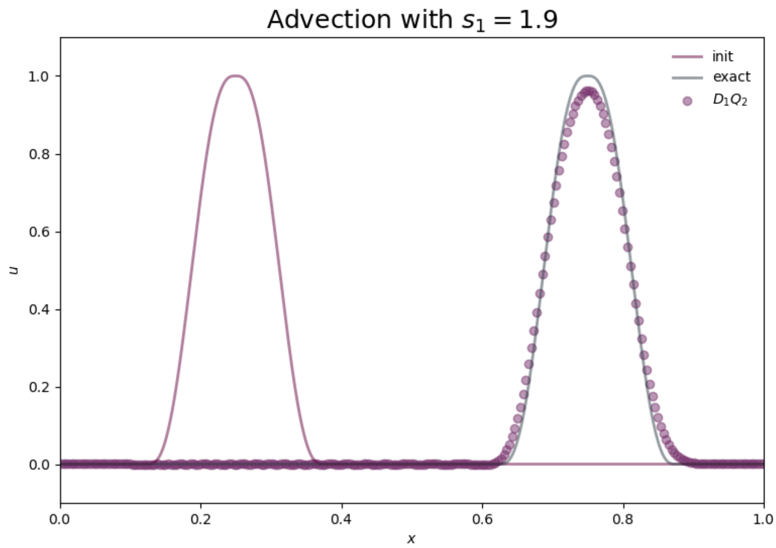
Exercice 1 : *Equation d'advection*

Dans cet exercice, nous considérons $c \in \mathbb{R}$ et $\varphi(\mathsf{u}) = c\mathsf{u}$ un flux linéaire afin de simuler une équation d'advection.

Q1. Rappelez quelle doit être la valeur de m_1^{eq} afin que le schéma soit consistant avec l'équation d'advection visée.

Q2. Proposez un script (langage suggéré `python` mais ce n'est pas obligatoire) permettant de calculer la solution exacte et la solution approchée par le schéma D_1Q_2.

Q3. Affichez la donnée initiale, la solution exacte et la solution approchée comme sur la figure suivante. Vous construirez une donnée initiale nulle sauf sur un compact et de classe au moins $\mathcal{C}^2$. Vous choisirez avec attention le nombre de points et les paramètres du schéma.



Q4. Prenez $\lambda < |c|$. Que se passe-t-il pour la solution numérique ? Proposez une explication.

Q5. Faites une étude de convergence. Vous comparerez pour cela la norme $\|\cdot\|_2$ de la différence entre la solution exacte et la solution approchée en faisant diminuer le pas d'espace Δx et en gardant tous les autres paramètres fixes. Montrez numériquement que

- si $\lambda > |c|$, $0 < s_1 < 2$, le schéma est d'ordre 1,
- si $\lambda > |c|$, $s_1 = 2$, le schéma est d'ordre 2.

Exercice 2 : *Equation de Burgers*

Dans cet exercice, nous considérons $\varphi(\mathsf{u}) = \mathsf{u}^2/2$ afin de simuler l'équation de Bürgers.

Q1. Rappelez quelle doit être la valeur de m_1^{eq} afin que le schéma soit consistant avec l'équation de Bürgers visée.

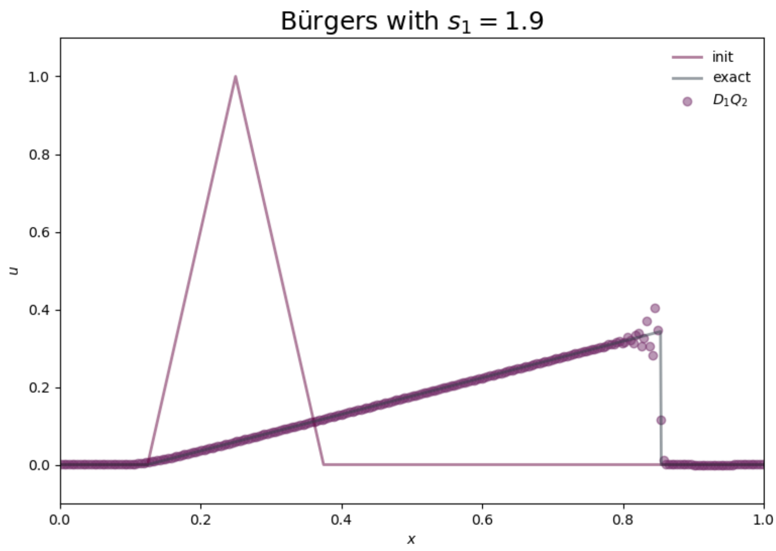
Voici un script permettant de calculer une solution particulière de l'équation de Bürgers.

```python
import numpy as np

def solution_adimensionnee(x, t):
    """
    A normalized hat solution of the Burgers equation

                        /\                        y=1
                       /  \
                      /    \
    ------------------/      \------------------   y=0
                   x=-1   0    1
    """
    y = np.zeros(x.shape)
    if t < 0:
        return y
    if t < 1:
        xi = t
        indr = np.logical_and(x >= t, x < 1)
        y[indr] = 1 - 1/(1-t)*(x[indr]-t)
    else:
        xi = 2*np.sqrt(.5*(1+t)) - 1
    indl = np.logical_and(x >= -1, x <= xi)
    y[indl] = 1/(1+t)*(1+x[indl])
    return y

def solution(x, t, xmin, xmax, ymax=1):
    """
    Hat solution of the Burgers equation
    adapted to the bounds of the figure
    """
    if ymax < 0:
        print("Error, ymax < 0 in solution")
        return
    middle, width = .75*xmin+.25*xmax, 0.125*(xmax-xmin)
    xx = 1/width*(x - middle)
    return ymax*solution_adimensionnee(xx, ymax/width*t)
```

Q2. Tracez la solution exacte proposée à différents instants. Montrez que la régularité de la fonction $\mathrm{u}(t,\cdot)$ varie avec le temps t : elle est continue jusqu'à un certain instant puis devient discontinue. Donnez l'instant où la discontinuité apparait.

Q3. Proposez un script (langage suggéré `python` mais ce n'est pas obligatoire) permettant de calculer la solution exacte et la solution approchée par le schéma D_1Q_2.

Q4. Affichez la donnée initiale, la solution exacte et la solution approchée comme sur la figure suivante. Vous choisirez avec attention le nombre de points et les paramètres du schéma.



Q5. La solution numérique est-elle pertinente quelle que soit la valeur de λ ? Proposez une explication en rapport avec l'étude faite à l'exercice 1.

Q6. Faites une étude de convergence. Vous comparerez pour cela la norme $\|\cdot\|_2$ de la différence entre la solution exacte et la solution approchée en faisant diminuer le pas d'espace Δx et en gardant tous les autres paramètres fixes. Quels sont les ordres de convergence que vous observez lorsque le temps final est inférieur ou supérieur à l'instant où la discontinuité apparait ? Concluez.