Feuille de TP n° 9

Résolution de manière approchée de l'équation $f(x) = 0$

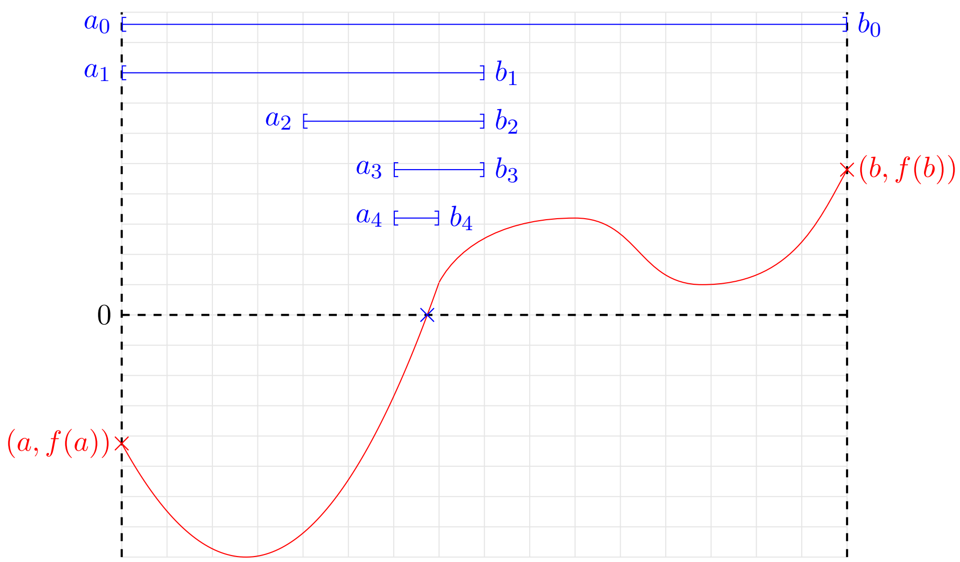
Créez le dossier `..\ECS1B_TPInfo\TP9\` et faites-en le répertoire courant de Scilab. Tous les scripts devront être sauvegardés dans ce dossier.

I Rappel de cours

Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs réelles telle que 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Le théorème des valeurs intermédiaires entraîne alors qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$. Rappelons comment on montre ce résultat :

Remarquons d'abord que, si $f(a) = 0$ ou $f(b) = 0$, alors le résultat est immédiat. Supposons que $f(a)f(b) \neq 0$. La preuve repose sur la méthode de dichotomie : on introduit les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} \left(a_n, \dfrac{a_n + b_n}{2}\right) & \text{si} \quad f(a_n)\, f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) < 0, \\ \left(\dfrac{a_n + b_n}{2}, b_n\right) & \text{si} \quad f(a_n)\, f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) \geqslant 0. \end{cases}$$



Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a_n, b_n) \in [a, b]^2$ et 0 est compris entre $f(a_n)$ et $f(b_n)$. De plus $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}.$$

Ainsi $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $1/2$. Elle converge donc vers 0. Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes. Par conséquent elles convergent vers un même réel c.

La fonction f est continue sur $[a, b]$ si bien que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = f(c)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = f(c)$. Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 0 est compris entre $f(a_n)$ et $f(b_n)$ (par construction), nous obtenons par encadrement que 0 est compris entre $f(c)$ et $f(c)$ et donc que $f(c) = 0$.

II Programmation en Scilab de l'algorithme de dichotomie

La méthode de dichotomie consiste en la construction de deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent toutes les deux vers un réel c vérifiant $f(c)=0$. Puisqu'il s'agit de suites adjacentes, on a de plus

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant c\leqslant b_{n+1}\leqslant b_n.$$

Soit $\varepsilon>0$. Il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $0<b_{n_0}-a_{n_0}\leqslant\varepsilon$. Nous en déduisons que :

— $0<b_{n_0}-c\leqslant\varepsilon$ donc b_{n_0} est une valeur approchée par excès de c.

— $0<c-a_{n_0}\leqslant\varepsilon$ donc a_{n_0} est une valeur approchée par défaut de c.

Comme on l'a vu dans la démonstration, la construction des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se fait de manière algorithmique. On se propose de la programmer en Scilab.

Exercice 1. Supposons que l'on dispose d'une fonction f continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ que l'on code en Scilab dans un script nommé `f.sci`. Le programme (incomplet) suivant est composé de deux parties :

— Une première consacrée à l'implémentation d'une fonction f continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

— Une seconde consacrée à l'implémentation de l'algorithme de dichotomie : le programme demande à l'utilisateur trois réels a, b, ε vérifiant $(a,b)\in I^2$, $a<b$ et $\varepsilon>0$ et affiche une valeur approchée par défaut et par excès, avec une précision ε, d'une solution de l'équation $f(x)=0$ d'inconnue $x\in[a,b]$.

```
//Définition de la fonction f
function y=f(x)
       y=[        ]
endfunction;

//Algorithme de dichotomie
a=input('a=? ')
b=input('b=? ')
eps=input('précision : eps=? ')
if  f(a)*f(b)>0  then
       disp('erreur : f(a)*f(b)>0')//Message d'erreur
elseif  a>=b  then
       disp('erreur : a>=b')//Message d'erreur
else
       I='['+string(a)+','+string(b)+']';//Intervalle I=[a,b]
       while [          ]
              if  f((a+b)/2)==0  then
                     [                   ]
              elseif  f(a)*f((a+b)/2)<0  then
                     [             ]
              else
                     [             ]
              end
       end
       disp('L''équation f(x)=0 possède une solution c sur '+I+' qui vérifie ')
       disp(string(a)+' <= c <= '+string(b)+'.')
end
```

1) Compléter ce programme et implémenter-le dans un script nommé `dichotomie.sce`.

2) Tester le programme avec $f:x\longmapsto\cos(x/2)$, $a=0$, $b=4$ et $\varepsilon=10^{-5}$.

3) Modifier le script afin de représenter graphiquement cette méthode (tracer la courbe représentative de f et représenter les intervalles $[a_n,b_n]$ successifs).

Exercice 2. Créer un script appelé `sqrt2_Dicho.sce`. Copier/coller le contenu du script de `dichotomie.sce` et modifier-le de telle sorte qu'il affiche en plus le nombre d'itérations nécessaires pour déterminer une valeur approchée de $\sqrt{2} \in [a, b]$ à ε-près.

Tester avec $a = 1$, $b = 2$ et $\varepsilon = 10^{-6}$. Noter ici le nombre d'itérations : $\boxed{}$

Exercice 3. La fonction $\text{Arccos} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$ est la fonction réciproque de $\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ (cf. feuille d'exercice 13).

1) A l'aide de l'algorithme de dichotomie, écrire une fonction Scilab nommée `Arccos.sci` qui prend en argument un réel $x \in [-1, 1]$ et qui calcule (une valeur approchée à 10^{-10} près de) $\text{Arccos}(x)$. On pourra ajouter un message d'erreur si on donne un réel $x \notin [-1, 1]$ en argument.
2) Représenter sur un même graphique la fonction Arccos en utilisant la fonction `Arccos.sci` et la fonction prédéfinie `acos`.

III Méthode du point fixe

Supposons que résoudre $f(x) = 0$ soit équivalent à résoudre l'équation $g(x) = x$, pour une certaine fonction g (il en existe forcément : par exemple $g : x \mapsto f(x) + x$), et donc équivalent à déterminer un point fixe de g. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 \in D_g$ (bien choisi) et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$. On sait que, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ et si g est continue au voisinage de ℓ, alors ℓ est un point fixe de g.

Pour que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, il faut bien choisir la fonction g. Nous avons vu dans le chapitre *Dérivation* que c'est le cas si g est définie sur un intervalle I vérifiant :

— $g(I) \subset I$,

— g est dérivable sur I,

— g' est bornée par un réel $M \in]0, 1[$ sur I,

— g admet un point fixe sur I.

Exercice 4. Dans cette exercice, nous considérons la fonction $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto 2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $x^2 = 2$ si et seulement si $x = g(x)$. Créer un script appelé `sqrt2_Pointfixe1.sce` qui prend en entrée un réel x_0 et qui calcule les 100 premières valeurs de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ intervenant dans la méthode du point fixe avec la fonction g. Constater que la suite ne semble pas converger.

Exercice 5. Dans cette exercice, nous considérons la fonction $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{2}{3}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $x^2 = 2$ si et seulement si $x = g(x)$.

1) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n > 1$.
   b) Montrer que g' est bornée sur $]1, +\infty[$ par un réel $M \in]0, 1[$.
   c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|x_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant M|x_n - \sqrt{2}|$.
   d) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - \sqrt{2}| \leqslant M^n|x_0 - \sqrt{2}|$ et donc que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{2}$.
2) Créer un script appelé `sqrt2_Pointfixe2.sce` qui prend en entrée deux réels x_0 et $\varepsilon > 0$ et qui calcule une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à ε-près en utilisant la méthode du point fixe (la suite étant initialisée à x_0 et construite avec la fonction g).
3) Tester avec $x_0 = 1$ et $\varepsilon = 10^{-8}$. Noter ici le nombre d'itérations : $\boxed{}$
   Comparer avec l'approximation fournie par la méthode de dichotomie.
4) Peut-on remplacer la boucle `while` par une boucle `for` (quitte à perdre en rapidité) ?

Exercice 6. Nous cherchons une valeur approchée d'une solution de l'équation $x(e^x+1)=\ln(e^x+1)$.

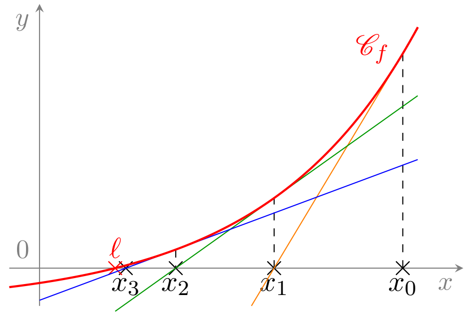
1) Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x(e^x+1)=\ln(e^x+1)$ si et seulement si $f(x)=x$ avec $f : x\longmapsto e^{-x}\ln(1+e^{-x})$.
2) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0\in\mathbb{R}$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1}=f(x_n)$. Nous avons montré dans l'exercice 16 de la feuille d'exercice n° 14, que f admet un unique point fixe $\ell\in\,]0,1[$ et que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

   Créer un script Scilab qui prend en entrée deux réels x_0 et $\varepsilon>0$ et qui calcule une valeur approchée de ℓ à ε-près en utilisant la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

IV Méthode de Newton

On se donne une fonction $f : I\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur I et telle que f' ne s'annule pas sur I. La méthode de Newton est un cas particulier de la méthode du point fixe dans le but de trouver une valeur approchée d'une solution de l'équation $f(x)=0$. Elle se base sur la construction d'une suite récurrence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0\in I$ et

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$



Interprétation graphique. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, x_{n+1} est la solution de l'équation $f(x_n)+f'(x_n)(x-x_n)=0$, c'est-à-dire x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en x_n avec la droite des abscisses.

Convergence et algorithme. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell\in I$ alors, par continuité de f et f' sur I, nous obtenons $\ell=\ell-f(\ell)/f'(\ell)$, soit $f(\ell)=0$. Ceci nous fournit une méthode algorithmique pour déterminer une valeur approchée d'une solution de l'équation $f(x)=0$: une fois construite la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant [1] vers ℓ et vérifiant $f(\ell)=0$ et une fois fixée une précision ε, on arrête l'algorithme dès que $|x_{n+1}-x_n|\leqslant\varepsilon$.

Exercice 7. Dans cet exercice f désigne la fonction $x\longmapsto x^2-2$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0\in\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ (méthode de Newton).

1) Posons $g : x\in\mathbb{R}_+^*\longmapsto x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$.
   a) Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $g(x)-\sqrt{2}=\dfrac{(x-\sqrt{2})^2}{2x}$. En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $x_n\geqslant\sqrt{2}$.
   b) Notons $M=(2\sqrt{2})^{-1}$. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $|x_{n+1}-\sqrt{2}|\leqslant M\,|x_n-\sqrt{2}|^2$.
   c) En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|x_n-\sqrt{2}|\leqslant M^{2^n-1}\,|x_0-\sqrt{2}|^{2^n}$ et donc que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{2}$.
   d) Comparer la vitesse de convergence par rapport à celle obtenue dans l'exercice 5.
2) Créer un script appelé `sqrt2_Newton.sce` qui prend en entrée deux réels x_0 et $\varepsilon>0$ et qui calcule une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à ε-près en utilisant la méthode de Newton (la suite étant initialisée à x_0).
3) Tester avec $x_0=1$ et $\varepsilon=10^{-8}$. Noter ici le nombre d'itérations : $\boxed{}$

   Comparer avec les approximations fournies par la méthode de dichotomie et la méthode du point fixe.

1. Il faut bien sûr montrer au préalable que la suite converge bien. Nous verrons dans un exercice du cours *Dérivées d'ordre supérieur* que, avec des hypothèses supplémentaires sur la fonction f, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ de manière quadratique : si x_0 est suffisamment proche de ℓ, alors il existe $K>0$ et $M\in\,]0,1[$ tels que $|x_n-\ell|\leqslant K\,M^{2^n}$ pour n assez grand. Il s'agit donc d'une convergence très rapide.

Exercice 8. Considérons l'application polynômiale $P : x \longmapsto x^3 - 4x - 7$.

1) Montrer que P admet une unique racine réelle ℓ et que $\ell \in \left[\frac{5}{2}, 3\right]$.
2) Notons $g : x \longmapsto x - \frac{P(x)}{P'(x)}$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$ (méthode de Newton).
   a) Notons $I = [\ell, +\infty[$. Montrer que $g(I) \subset I$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geqslant \ell$.
   b) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
3) Montrer que, pour tout réel $x \in I$, $g(x) - \ell = \frac{(x-\ell)^2(2x+\ell)}{3x^2-4}$.
   En déduire qu'il existe $M \in]0,1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - \ell| \leqslant M\,|x_n - \ell|^2$.
4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - \ell| \leqslant M^{2^n - 1}$.
5) On s'attend donc à une convergence rapide de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ. Créer un script Scilab qui prend en entrée $\varepsilon > 0$ et qui calcule une valeur approchée de ℓ à ε-près et qui précise le nombre d'itérations nécessaires. Tester avec différente valeurs de ε.

Une variante : la méthode de la sécante (ou de Lagrange). La méthode de Newton nécessite que la fonction f considérée soit dérivable. La méthode de la sécante consiste à remplacer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f'(x_n) \qquad \text{par} \qquad \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

On construit donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_1 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{(x_{n+1} - x_n) f(x_n)}{f(x_{n+1}) - f(x_n)}.$$

Exercice 9. Créer un script appelé `sqrt2_Secante.sce` qui prend en entrée trois réels x_0, x_1 et $\varepsilon > 0$ et qui calcule une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à ε-près en utilisant la méthode de la sécante (la suite étant initialisée à x_0 et x_1).

Tester avec $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ et $\varepsilon = 10^{-8}$. Noter ici le nombre d'itérations : $\boxed{}$
Comparer avec les approximations fournies par la méthode de dichotomie, la méthode du point fixe et la méthode de Newton.