Feuille de TP n° 12

Probabilités avec Scilab

B – Simulation et représentation de variables aléatoires à densité

Ce TP accompagne le chapitre 6 (Informatique et Algorithmique) : **Probabilités avec Scilab**. Créer le dossier `..\ECS1B_TPInfo\TP12\` et faites-en le répertoire courant de Scilab. Tous les scripts devront être sauvegardés dans ce dossier.

I Simulation de variables aléatoires réelles à densité

1) Simulations avec `rand`

• Soient a et b des entiers tels que a < b. Justifier brièvement que le nombre renvoyé par la commande `X=a+(b-a)*rand()` peut être assimilé à la réalisation d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$. Exécuter les commandes suivantes dans la console :

```
-->a=-3; b=5; X=a+(b-a)*rand();
-->X=a+(b-a)*rand(4,7);
```

• Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$. On a alors $1-U>0$ presque sûrement et $X=-\dfrac{1}{a}\ln(1-U)$ est une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(a)$ (cf. chapitre 6 d'Info). Exécuter les commandes suivantes dans la console :

```
-->a=3; X=-log(1-rand())/a;
-->a=1/2; X=-log(1-rand(5,3))/a;
```

Écrire une commande qui simule la durée de vie (en année) de 10 ampoules dont la durée de vie moyenne est de 4 ans.

2) Simulations avec `grand`

• Exécuter les commandes suivantes dans la console :

```
-->U=grand(7,2,'unf',0,1)
-->V=grand(1,9,'unf',-3.2,5.4)
-->X=grand(3,10,'exp',1/6.5)
```

```
-->Y=grand(5,5,'nor',0,1)
-->Z=grand(6,2,'nor',-4,2)
-->T=grand(6,2,'nor',3,5)
```

• Simuler une variable aléatoire de loi Normale de moyenne $m=2$ et de variance $\sigma^2=1/2$.

II Représentation graphique de lois à densité

1) Représentation graphique de lois théoriques

Exercice 1. Écrire une fonction appelée `FRepNorm.sci` qui prend en entrée un réel x et qui renvoie une valeur approchée de $\Phi(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\frac{dt}{\sqrt{2\pi}}$ à l'aide de la méthode des rectangles.

On pourra utiliser le fait que $\Phi(x)=\dfrac{1}{2}+\mathrm{sg}(x)\displaystyle\int_0^{|x|} e^{-t^2/2}\frac{dt}{\sqrt{2\pi}}$ *avec* $\mathrm{sg}(x)=\begin{cases}-1 & \textit{si} \quad x<0\\ 1 & \textit{si} \quad x>0\\ 0 & \textit{si} \quad x=0\end{cases}$.

Pour tracer la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(\mathtt{m}, \mathtt{s}^2)$, on utilise le programme de l'exercice 1 et les propriétés qui la relie avec Φ. On peut aussi utiliser la commande prédéfinie

```
cdfnor("PQ",x,m*ones(x),s*ones(x));
```

avec `x` un vecteur représentant un intervalle discrétisé (cf. l'aide Scilab pour plus de précisions que `cdfnor`).

Exercice 2.

1) Écrire une programme qui trace dans la même fenêtre (une ligne par loi), côte-à-côte une représentation graphique d'une densité et de la fonction de répartition des variables de lois $\mathcal{U}([0,1])$, $\mathcal{E}(1)$ et $\mathcal{N}(0,1)$.
2) Modifier ce programme pour qu'il prenne en entrée des paramètres a, b, λ, m, σ^2 et pour qu'il trace une représentation graphique d'une densité et de la fonction de répartition des variables de lois $\mathcal{U}([a,b])$, $\mathcal{E}(\lambda)$ et $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$.

2) Représentation graphique de phénomènes aléatoires continus

Exercice 3. Écrire une fonction Scilab qui :

- prend en entrée un réel `a` strictement positif et un entier naturel `n`,
- simule `n` réalisations d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(\mathtt{a})$ et les stocke dans un vecteur X.
- ouvre une fenêtre graphique contenant deux zones,
- dans la première zone :
  — construit l'histogramme renormalisé des données de `X`,
  — lui superpose la courbe de la densité d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(\mathtt{a})$.
- dans la deuxième zone :
  — construit la fonction de répartition empirique des données de `X`,
  On utilisera les commandes `tabul` *et* `cumsum`.
  — lui superpose la courbe de la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(\mathtt{a})$.

Tester cette fonction avec $\mathtt{a} \in \{1/2, 1, 2\}$ et $\mathtt{n} \in \{10, 100, 1000, 10000\}$

Exercice 4. Même exercice avec les lois $\mathcal{U}([a,b])$ et $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$.