Feuille de TP n° 11

Calcul approché d'intégrales

Créer le dossier `..\ECS1B_TPInfo\TP11\` et faites-en le répertoire courant de Scilab. Tous les scripts devront être sauvegardés dans ce dossier.

I Méthode des rectangles

1) Rappels sur les sommes de Riemann

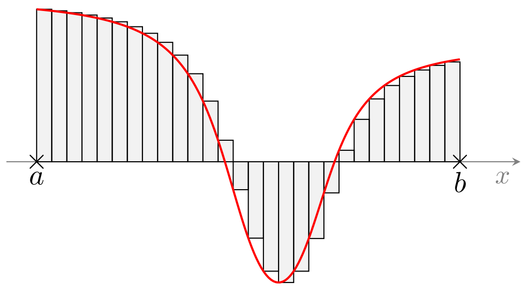
a) Convergence des sommes de Riemann

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ avec a et b deux réels tels que $a<b$. Fixons $n\in\mathbb{N}^*$ et notons

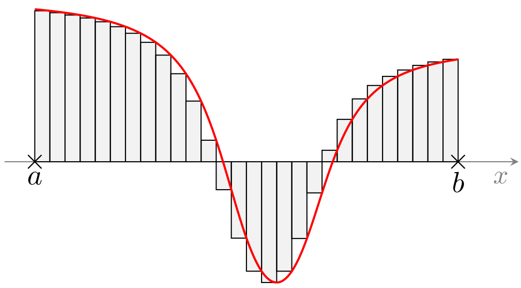
$$S_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right),$$

$$T_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right),$$

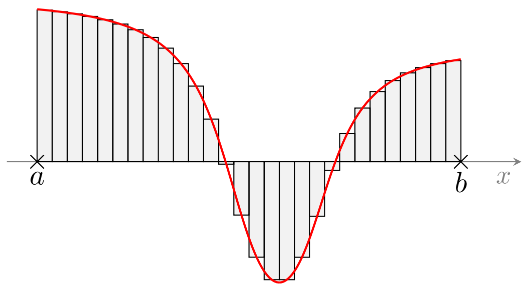
$$M_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right).$$



En rouge la courbe représentative de f.
Colorée en gris, la somme de Riemann $S_n(f)$.



Colorée en gris, la somme de Riemann $T_n(f)$.



Colorée en gris, la somme de Riemann $M_n(f)$.

Les suites $(S_n(f))_{n\geqslant 1}$, $(T_n(f))_{n\geqslant 1}$ et $(M_n(f))_{n\geqslant 1}$ convergent vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$. Cela fournit une méthode numérique permettant d'approcher des intégrales par ces sommes. Cette méthode d'approximation est appelée la méthode des rectangles (à gauche si l'on considère $(S_n(f))_{n\geqslant 1}$, à droite si l'on considère $(T_n(f))_{n\geqslant 1}$, au milieu si l'on considère $(M_n(f))_{n\geqslant 1}$).

b) Cas des fonctions continues et croissantes

Supposons que f est continue et croissante sur $[a,b]$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\forall k\in[\![0,n-1]\!],\qquad \forall t\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right],\qquad f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\leqslant f\left(a+t(b-a)\right)\leqslant f\left(a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right)$$

donc, en intégrant,

$$\forall k\in[\![0,n-1]\!],\qquad \frac{1}{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\leqslant\int_{k/n}^{(k+1)/n} f\left(a+t(b-a)\right)\,dt\leqslant\frac{1}{n}f\left(a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right).$$

On somme et on utilise la relation de Chasles : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\dfrac{S_n(f)}{b-a} \leqslant \displaystyle\int_0^1 f\left(a+t(b-a)\right)\, dt \leqslant \dfrac{T_n(f)}{b-a}$.

Le changement de variable $x = a + t(b-a)$ donne enfin : $\boxed{S_n(f) \leqslant \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \leqslant T_n(f).}$

Combien d'itérations sont-elles nécessaires pour que $S_n(f)$ et $T_n(f)$ soient des approximations de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ à ε-près ? On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant T_n(f) - S_n(f) \leqslant \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right) - f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right) = \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n}$$

car on reconnait une somme télescopique. Si $n_0 \in \mathbb{N}^*$ est tel que $\dfrac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n_0} \leqslant \varepsilon$, par exemple $\boxed{n_0 = \left\lfloor \dfrac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\varepsilon} \right\rfloor + 1,}$ alors $S_{n_0}(f)$ (resp. $T_{n_0}(f)$) est une approximation de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ à ε-près par défaut (resp. excès).

c) Cas des fonctions continues et décroissantes

Supposons que f est continue et décroissante sur $[a,b]$. On se ramène au cas précédent en considérant $-f$:
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{T_n(f) \leqslant \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \leqslant S_n(f).}$ Si $n_0 \in \mathbb{N}^*$ est tel que $\boxed{n_0 = \left\lfloor \dfrac{(b-a)(f(a)-f(b))}{\varepsilon} \right\rfloor + 1,}$ alors $S_{n_0}(f)$ (resp. $T_{n_0}(f)$) est une approximation de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ à ε-près par excès (resp. défaut).

d) Cas des fonctions de classe C^1

Si f est de classe C^1 sur $[a,b]$, alors on a des informations sur la vitesse de convergence de cette méthode (cf. chapitre 14) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left|S_n(f) - \int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2n}\max_{[a,b]}|f'|.$$

Cette inégalité permet de contrôler le terme d'erreur dans l'approximation de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ par $S_n(f)$. Plus précisément si $n_0 \in \mathbb{N}^*$ est tel que $\dfrac{(b-a)^2}{2n_0}\max\limits_{[a,b]}|f'| \leqslant \varepsilon$, par exemple $\boxed{n_0 = \left\lfloor \dfrac{(b-a)^2}{2\varepsilon}\max\limits_{[a,b]}|f'| \right\rfloor + 1,}$ alors S_{n_0} est une approximation de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ à ε-près.

2) Mise en oeuvre avec Scilab

Exercice 1. Supposons que l'on dispose de deux réels a et b tels que $a < b$ et d'une fonction continue sur $[a,b]$.

1) Recopier le programme et enregistrer-le dans un script nommé `MethodeRectangle1.sce`.

```
//Choix de a et b
a=0; b=1;

//Définition de la fonction f
function y=f(x)
      y=1./(1+x.*x);
endfunction;

//Méthode des rectangles
eps=input('précision : eps=? ')
n=floor((b-a)*(f(a)-f(b))/eps)+1;
```

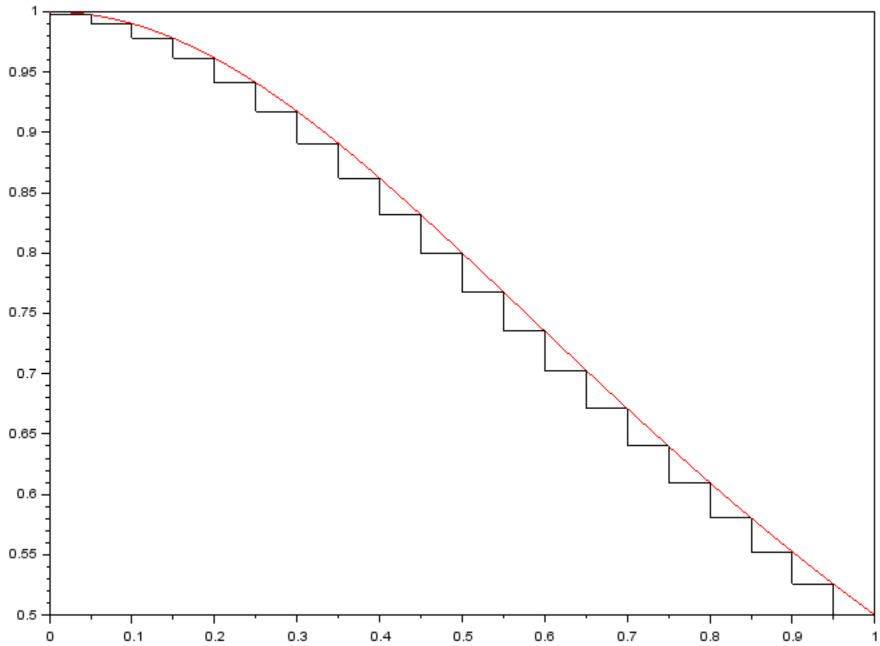
Vous vous en doutez, on s'apprête à calculer une approximation de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$. Le choix de n dans l'algorithme nous est dicté par le fait que la fonction f est décroissante sur $[0,1]$.

2) En utilisant une boucle `for`, compléter ce programme pour qu'il renvoie une approximation par défaut (utilisant $T_n(f)$ dans ce cas) et par excès (utilisant $S_n(f)$ dans ce cas) de $\dfrac{\pi}{4}$.

3) En utilisant les commandes `linspace` et `sum`, modifier ce programme pour qu'il n'utilise plus de boucle `for`.

4) Modifier ce programme en changeant la valeur de `n` en exploitant le fait que $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est de classe C^1 sur $[0,1]$. Est-ce intéressant dans ce cas ?

5) Modifier le programme afin qu'il renvoie le graphique suivant :



Exercice 2. A l'aide de boucles `while`, tester sur l'exemple de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ la méthode d'approximation qui est la plus rapide parmi la méthode des rectangles à gauche, à droite et la méthode du point milieu (celle utilisant la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

Exercice 3. Calculer des approximations (à 10^{-4} près) de

1) $\ln(2) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$, 2) $\pi = \displaystyle\int_0^1 4\sqrt{1-x^2}\,dx$ 3) $\dfrac{\pi^2}{6} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1}\,dx$,

Exercice 4 (Fonction de répartition d'une v.a. suivant une loi normale centrée réduite). Écrire une fonction appelée `FRepNorm.sci` qui prend en entrée un réel x et qui renvoie une valeur approchée de l'intégrale $\Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\frac{dt}{\sqrt{2\pi}}$ à l'aide de la méthode des rectangles.

Il s'agit de la fonction de répartition d'une v.a. suivant une loi normale centrée réduite (cf. chapitre 28). On utilisera le fait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \Phi(x) \approx \begin{cases} 1 & \textit{si} \quad x > 4 \\ 0 & \textit{si} \quad x < -4 \\ \displaystyle\int_{-4}^{x} e^{-t^2/2}\frac{dt}{\sqrt{2\pi}} & \textit{si} \quad x \in [-4,4]. \end{cases}$$

II Méthode des trapèzes

La méthode des trapèzes consiste à remplacer les rectangles des sommes de Riemann par des trapèzes rectangles de même base. On approche alors $\int_a^b f(t)\,dt$ par les sommes

$$\frac{b-a}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)+f\left(a+\frac{k+1}{n}(b-a)\right)\right)=\frac{1}{2}\left(S_n(f)+T_n(f)\right), \qquad n\in\mathbb{N}^*.$$

On peut montrer que, si f est de classe C^2 sur $[a,b]$, alors

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \qquad \left|\frac{1}{2}\left(S_n(f)+T_n(f)\right)-\int_a^b f(t)\,dt\right|\leqslant\frac{(b-a)^3}{12n^2}\max_{[a,b]}|f''|.$$

Autrement dit cette quantité converge vers l'intégrale avec une vitesse $\frac{1}{n^2}$ (contre $\frac{1}{n}$ pour la méthode des rectangles).

Exercice 5.

1) Écrire un programme qui calcule une approximation de $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ avec la méthode des trapèzes.
2) A l'aide d'une boucle `while`, vérifier sur cet exemple que cette méthode est bien plus rapide que la méthode des rectangles et la méthode du point milieu.