Correction de quelques exercices de la feuille de TD 9

I Calculs de probabilités

Exercice 5 (Le problème du chevalier de Méré). En 1654, le chevalier de Méré, philosophe et homme de lettres posa le problème suivant au mathématicien Blaise Pascal : « Qu'est-ce qui est le plus probable : obtenir au moins un six en quatre lancers d'un dé, ou obtenir au moins un double six en lançant vingt-quatre fois deux dés ? ». Étudier ce problème.

Correction :

- On lance quatre fois un dé équilibré à six faces. On considère l'univers $\Omega_1 = [\![1,6]\!]^4$ muni de $\mathcal{P}(\Omega_1)$ et de l'équiprobabilité $\mathbb{P}_1$. On a $\mathrm{card}(\Omega_1) = 6^4$. Si A_1 est l'événement " obtenir au moins un six", alors
$$\mathbb{P}_1(A_1) = 1 - \mathbb{P}_1(\overline{A}_1) = 1 - \frac{\mathrm{card}(\overline{A}_1)}{\mathrm{card}(\Omega)} = 1 - \frac{5^4}{6^4} = \frac{671}{1296} > \frac{1}{2}.$$
- On lance vingt-quatre fois deux équilibré à six faces. On considère l'univers $\Omega_2 = \left([\![1,6]\!]^2\right)^{24}$ muni de $\mathcal{P}(\Omega_2)$ et de l'équiprobabilité $\mathbb{P}_2$. On a $\mathrm{card}(\Omega_2) = 36^{24}$. Si A_2 est l'événement " obtenir au moins un double six", alors
$$\mathbb{P}_2(A_2) = 1 - \mathbb{P}_2(\overline{A}_2) = 1 - \frac{\mathrm{card}(\overline{A}_2)}{\mathrm{card}(\Omega)} = 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} \approx 0,491 < \frac{1}{2}.$$

Ainsi le premier cas est plus probable.

Exercice 6. Une entreprise réceptionne périodiquement des lots de pièces destinées à des assemblages. Pour contrôler la qualité d'un lot de taille n, elle échantillonne r pièces ($r < n$). En supposant que le lot contienne k pièces défectueuses ($k \leqslant n$), quelle est la probabilité de trouver m pièces défectueuses dans l'échantillon examiné ($m \leqslant r$) ?

Correction : Ici l'espace Ω considéré est l'ensemble des tirages de r pièces dans un lot de n pièces, il est de cardinal $\binom{n}{r}$. On le munit de $\mathcal{P}(\Omega)$ et de $\mathbb{P}$ l'équiprobabilité. Nous avons $\mathrm{card}(\Omega) = \binom{n}{r}$.

Soit A l'événement "trouver m pièces défectueuses dans l'échantillon examiné". On a $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}$. Effectuer un tirage de r pièces contenant m pièces défectueuses revient à tirer m pièces parmi les k défectueuses puis à tirer $r - m$ pièces restantes parmi les $n - k$ n'étant pas défectueuses. Ainsi $\mathrm{card}(A) = \binom{k}{m}\binom{n-k}{r-m}$. Finalement
$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{k}{m}\binom{n-k}{r-m}}{\binom{n}{r}}.$$

II Probabilités conditionnelles et indépendance

Exercice 10. Les téléviseurs d'un magasin d'électroménager proviennent de deux fournisseurs A et B. Une enquête révèle que 95% (respectivement 99%) des téléviseurs fournies par la société A (respectivement la société B) sont en état de fonctionnement. Elle révèle que un téléviseur sur 48 est abimé lors de la livraison au client. Enfin on sait que la société A fournit 3 fois plus de téléviseurs que la société B. Monsieur Durand vient de se faire livrer un téléviseur défectueux provenant de ce magasin. Quelle est la probabilité que le téléviseur ait été abimé lors de la livraison ? Quelle est la probabilité que le téléviseur ait été fourni déjà défectueux par la société A ?

Correction : Notons F_A l'événement "le téléviseur provient de A", F_B l'événement "le téléviseur provient de B", D l'événement "le téléviseur est défectueux avant la livraison" et L l'événement "le téléviseur est défectueux après la livraison". On a $\mathbb{P}(F_A) = 3\mathbb{P}(F_B)$ et $\mathbb{P}(F_A) + \mathbb{P}(F_B) = 1$ donc on en déduit que $\mathbb{P}(F_A) = \frac{3}{4}$.

- On désire calculer $\mathbb{P}_L(F_A)$. La formule de Bayes entraîne que
$$\mathbb{P}_L(\overline{D}) = \frac{\mathbb{P}_{\overline{D}}(L)\mathbb{P}(\overline{D})}{\mathbb{P}(L)}.$$
Calculons $\mathbb{P}(\overline{D})$. La formule des probabilités totales entraîne que
$$\mathbb{P}(\overline{D}) = \mathbb{P}_{F_A}(\overline{D})\mathbb{P}(F_A) + \mathbb{P}_{F_B}(\overline{D})\mathbb{P}(F_B) = \frac{95}{100}\frac{3}{4} + \frac{99}{100}\frac{1}{4} = \frac{24}{25}$$
et que
$$\mathbb{P}(L) = \mathbb{P}_D(L)\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}_{\overline{D}}(L)\mathbb{P}(\overline{D}) = 1 \cdot \frac{1}{25} + \frac{1}{48}\frac{24}{25} = \frac{3}{50}$$
Par ailleurs $\mathbb{P}_L(\overline{D}) = \frac{1}{48}$ donc $\mathbb{P}_L(\overline{D}) = \frac{\frac{24}{25} \cdot \frac{1}{48}}{\frac{3}{50}} = \frac{1}{3}$.
- On cherche à calculer $\mathbb{P}_L(F_A \cap D)$. La formule de Bayes entraîne que
$$\mathbb{P}_L(F_A \cap D) = \frac{\mathbb{P}_{F_A \cap D}(L)\mathbb{P}(F_A \cap D)}{\mathbb{P}(L)}.$$
On a $\mathbb{P}_{F_A \cap D}(L) = 1$, $\mathbb{P}(L) = \frac{3}{50}$ et $\mathbb{P}(F_A \cap D) = \mathbb{P}_{F_A}(D)\mathbb{P}(F_A) = \frac{5}{100}\frac{3}{4} = \frac{3}{80}$. Ainsi
$$\mathbb{P}_L(F_A \cap D) = \frac{1 \cdot \frac{3}{80}}{\frac{3}{50}} = \frac{5}{8}.$$

Exercice 12. Catherine a un garçon atteint de dystrophie musculaire de Duchenne (DMD). Il s'agit d'une maladie due à une mutation récessive liée au sexe, et entraînant un déficit complet de la production de dystrophine. Seuls les hommes porteurs de cette mutation sont atteints, tandis que les femmes sont conductrices. Les femmes conductrices ont un risque de 50% de transmettre l'allèle muté à leur descendance : les fils d'une femme conductrice ont 50% de risque d'être atteints et les filles d'une femme conductrice ont 50 % de risque d'être conductrices. Cependant, le taux de mutation spontanée est élevé : 1/3 des cas de DMD surviennent chez des garçons de mères non porteuses de la mutation. Il existe un test clinique qui est positif avec probabilité 0.7 si une femme est conductrice et positif avec probabilité 0.1 si elle ne l'est pas. Le test de Catherine est positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit conductrice ?

Correction : Notons MC l'événement « la mère est conductrice » et TP l'événement « le test est positif ». Nous cherchons à évaluer $\mathbb{P}(\mathrm{MC}|\mathrm{TP})$. D'après l'énoncé, nous avons
$$\mathbb{P}(\mathrm{TP}|\mathrm{MC}) = \frac{7}{10}, \qquad \mathbb{P}(\mathrm{MC}) = \frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{TP}|\overline{\mathrm{MC}}) = \frac{1}{10}.$$
Nous avons (formule de Bayes)
$$\mathbb{P}(\mathrm{MC}|\mathrm{TP}) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{MC} \cap \mathrm{TP})}{\mathbb{P}(\mathrm{TP})} = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{TP}|\mathrm{MC})\mathbb{P}(\mathrm{MC})}{\mathbb{P}(\mathrm{TP})}.$$
De plus, via la formule des probabilités totales,
$$\mathbb{P}(\mathrm{TP}) = \mathbb{P}(\mathrm{TP} \cap \mathrm{MC}) + \mathbb{P}(\mathrm{TP} \cap \overline{\mathrm{MC}}) = \mathbb{P}(\mathrm{TP}|\mathrm{MC})\mathbb{P}(\mathrm{MC}) + \mathbb{P}(\mathrm{TP}|\overline{\mathrm{MC}})(1 - \mathbb{P}(\mathrm{MC})).$$
Ainsi
$$\mathbb{P}(\mathrm{MC}|\mathrm{TP}) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{TP}|\mathrm{MC})\mathbb{P}(\mathrm{MC})}{\mathbb{P}(\mathrm{TP}|\mathrm{MC})\mathbb{P}(\mathrm{MC}) + \mathbb{P}(\mathrm{TP}|\overline{\mathrm{MC}})(1 - \mathbb{P}(\mathrm{MC}))}.$$
On obtient
$$\mathbb{P}(\mathrm{MC}|\mathrm{TP}) = \frac{\frac{7}{10}\frac{2}{3}}{\frac{7}{10}\frac{2}{3} + \frac{1}{10}\frac{1}{3}} = \frac{14}{15} \approx 0.933.$$

Exercice 13. On dispose d'un circuit composé de de trois composants électroniques A, B et C dont les probabilités de fonctionnement sont respectivement α, β et γ. On suppose les composants sont en état de fonctionnement indépendamment les uns des autres. Quel est la probabilité que le circuit fonctionne :

- lorsque les composants sont montés en série.
- lorsque les composants sont montés en parallèle.
- lorsque A est monté en série avec le sous-circuit constitué de B et C montés en parallèle.

Correction : Notons F l'événement "le circuit fonctionne", F_A l'événement "le composant A fonctionne", F_B l'événement "le composant B fonctionne" et F_C l'événement "le composant C fonctionne".

1) Si les composants sont montés en série alors le circuit fonctionne si et seulement si les trois composants fonctionnent. Ainsi

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(F_A \cap F_B \cap F_C) = \mathbb{P}(F_A)\mathbb{P}(F_B)\mathbb{P}(F_C) = \alpha\beta\gamma,$$

car les trois circuits sont indépendants.

2) Si les composants sont montés en parallèle alors le circuit fonctionne si et seulement si au moins un des trois composants fonctionne. Ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(F_A \cup F_B \cup F_C) = 1 - \mathbb{P}(\overline{F_A \cup F_B \cup F_C}) = \mathbb{P}(\overline{F_A} \cap \overline{F_B} \cap \overline{F_C})\\ 1 - \mathbb{P}(\overline{F_A})\mathbb{P}(\overline{F_B})\mathbb{P}(\overline{F_C})\\ = 1 - (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma),\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que les trois circuits sont indépendants à l'avant dernière ligne.

3) Si A est monté en série avec le sous-circuit constitué de B et C montés en parallèle, alors le circuit fonctionne si A fonctionne et si le sous circuit fonctionne (qui lui fonctionne si l'un au moins fonctionne). Ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F) &= \mathbb{P}(F_A \cap (F_B \cup F_C))\\ &= \mathbb{P}(F_A)\mathbb{P}(F_B \cup F_C)\\ &= \mathbb{P}(F_A)\big(\mathbb{P}(F_B) + \mathbb{P}(F_C) - \mathbb{P}(F_A \cap F_C)\big)\\ &= \alpha\big(\beta + \gamma - \beta\gamma\big).\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que les trois circuits sont indépendants à la deuxième et la dernière ligne, et la formule de Poincaré à l'avant dernière.

Exercice 14 (bis). On dispose d'un sac opaque de billes dont 9 rouges, 5 vertes et 7 bleues. On pioche cinq billes au hasard successivement et **avec** remise. Calculer la probabilité de piocher

1) uniquement des billes d'une même couleur.
2) uniquement des billes bleues sachant que toutes les billes sont de la même couleur.
3) trois boules d'une couleur et deux d'une autre couleur.
4) au moins une bille de chaque couleur.
5) trois billes rouges sachant que les trois couleurs sont piochées.

Correction : On considère Ω l'ensemble des tirages de cinq billes avec remise, muni de $\mathcal{P}(\Omega)$ et de $\mathbb{P}$ l'équiprobabilité. On note $R_i/V_i/B_i$ les événements « piocher rouge/bleue/verte au $i^{\text{ième}}$ tirage ». Il a $9+5+7=21$ billes. Si les tirages se font avec remise, ils peuvent être considérés comme indépendants.

1) Soit C l'événement « tirer uniquement des billes d'une même couleur ». On a

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4 \cap R_5) + \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5) + \mathbb{P}(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4 \cap V_5).$$

Par indépendance :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}(R_2)\mathbb{P}(R_3)\mathbb{P}(R_4)\mathbb{P}(R_5) + \cdots\\ &= \frac{9}{21}\frac{9}{21}\frac{9}{21}\frac{9}{21}\frac{9}{21} + \frac{7}{21}\frac{7}{21}\frac{7}{21}\frac{7}{21}\frac{7}{21} + \frac{5}{21}\frac{5}{21}\frac{5}{21}\frac{5}{21}\frac{5}{21} = \left(\frac{9}{21}\right)^5 + \left(\frac{7}{21}\right)^5 + \left(\frac{5}{21}\right)^5 \approx 0,019.\end{aligned}$$

2) La probabilité de tirer uniquement des billes bleues sachant que toutes les billes sont de la même couleur est

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_C(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5) &= \frac{\mathbb{P}(C \cap B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5)}{\mathbb{P}(C)} \\ &= \frac{\left(\frac{7}{21}\right)^5}{\left(\frac{9}{21}\right)^5 + \left(\frac{7}{21}\right)^5 + \left(\frac{5}{21}\right)^5} = \frac{7^5}{9^5 + 7^5 + 5^5} \approx 0,218.\end{aligned}$$

3) A deux couleurs C_1 et C_2 fixée, il y a $\binom{5}{2} = 10$ façon de faire un tirage de deux boules de la couleur C_1 et trois de la couleur C_2. Notons A_{C_1,C_2} l'événement « tirer deux boules de la couleur C_1 et trois de la couleur C_2 ». Donc, par additivité finie et par indépendance,

$$\mathbb{P}(A_{R,B}) = \frac{\text{card}(A_{R,B})}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\binom{5}{2} \cdot 9^3 \cdot 7^2}{21^5} = 10 \times \frac{9^3 \cdot 7^2}{21^5}$$

$$\mathbb{P}(A_{B,R}) = 10 \times \frac{9^2 \cdot 7^3}{21^5}, \qquad \mathbb{P}(A_{R,V}) = 10 \times \frac{9^3 \cdot 5^2}{21^5}, \qquad \mathbb{P}(A_{V,R}) = 10 \times \frac{9^2 \cdot 5^3}{21^5}$$

$$\mathbb{P}(= A_{V,B}) = 10 \times \frac{7^2 \cdot 5^3}{21^5}, \qquad \mathbb{P}(A_{B,V}) = 10 \times \frac{5^3 \cdot 7^2}{21^5}.$$

Par conséquent

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_{R,B}) + \mathbb{P}(A_{R,V}) + \cdots + \mathbb{P}(A_{B,V}) = \cdots \approx 0,261.$$

4) Notons E l'événement « les trois couleurs ont été piochées ». Notons $F_R/F_B/F_V$ les événements « ne piocher aucune boule rouge/bleue/verte ». On a $\overline{E} = \mathbb{F}_R \cup F_B \cup F_V$. Nous allons utiliser la formule de Poincaré :

$$\mathbb{P}(F_A \cup F_R \cup F_V) = \mathbb{P}(F_R) + \mathbb{P}(F_B) + \mathbb{P}(F_B) - \mathbb{P}(F_R \cap F_B) - \mathbb{P}(F_R \cap F_V) - \mathbb{P}(F_B \cap F_V) + \mathbb{P}(F_R \cap F_B \cap F_V).$$

Nous avons, par indépendance,

$$\mathbb{P}(F_R \cap F_B \cap F_V) = 0, \quad \mathbb{P}(F_R) = \mathbb{P}(\overline{R}_1 \cap \overline{R}_2 \cap \overline{R}_3 \cap \overline{R}_4 \cap \overline{R}_5) = \left(\frac{12}{21}\right)^5, \quad \mathbb{P}(F_B) = \left(\frac{14}{21}\right)^5$$

$$\mathbb{P}(F_V) = \left(\frac{16}{21}\right)^5, \quad \mathbb{P}(F_R \cap F_B) = \left(\frac{5}{21}\right)^5, \quad \mathbb{P}(F_B \cap F_V) = \left(\frac{7}{21}\right)^5, \quad \mathbb{P}(F_R \cap F_V) = \left(\frac{9}{21}\right)^5.$$

On trouve alors

$$\mathbb{P}(\overline{E}) = 1 - \mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}(F_R \cup F_B \cup F_V) \approx 0,570.$$

5) Notons D l'événement « tirer trois boules d'une couleur et deux d'une autre couleur ». Il y a $\binom{5}{3}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 20$ façons de faire un tirage de trois billes rouges, une verte et une bleue et chacun de ces tirages possède la même probabilité p égale à $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap V_4 \cap B_5)$. Par additivité finie, on obtient

$$\mathbb{P}(D \cap E) = 20 \times \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap V_4 \cap B_5) = 20 \times \left(\frac{9}{21}\right)^3 \frac{7}{21} \frac{5}{21}$$

et donc $\mathbb{P}_E(D) = \dfrac{\mathbb{P}(D \cap E)}{\mathbb{P}(E)} \approx 0,219.$

Exercice 15. Un fumeur veut arrêter de fumer. S'il réussit à ne pas fumer un jour, alors il reste motivé le lendemain et il a 3 chances sur 4 de ne pas fumer. Par contre, s'il fume un jour, alors le lendemain il fume avec probabilité $\alpha \in]0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note p_n la probabilité qu'il fume le $n^{\text{ième}}$ jour. On suppose que $p_0 = 1$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et α.
2) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de p_n en fonction de n, α et p_0.

3) Déterminer la limite de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si elle existe. Cette limite éventuelle peut-elle être nulle ? Dans le cas où la limite existe et n'est pas nulle, donnez-en en une borne inférieure. Cette stratégie vous semble-t-elle judicieuse pour arrêter de fumer ?

Correction : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons F_n l'événement "fumer le jour n". On a $p_n = \mathbb{P}(F_n)$.

1) Nous avons $p_0 = 1$ et $p_1 = \mathbb{P}(F_1) = \alpha$. Ensuite, fixons $n \in \mathbb{N}^*$. La formule des probabilités totales entraîne que
$$p_{n+1} = \mathbb{P}_{F_n}(F_{n+1})\mathbb{P}(F_n) + \mathbb{P}_{\overline{F}_n}(F_{n+1})\mathbb{P}(\overline{F}_n) = \alpha p_n + \frac{1}{4}(1-p_n) = \big(\alpha - \frac{1}{4}\big)p_n + \frac{1}{4}.$$
Notons que cette formule reste vraie si $n = 0$

2) On reconnait une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x = \big(\alpha - \frac{1}{4}\big)x + \frac{1}{4}$ si et seulement si $x = \frac{1}{5-4\alpha}$ (aucun soucis car $\alpha \in]0,1[$ donc $5 - 4\alpha \neq 0$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = p_n - x$ et on vérifie que $u_{n+1} = \big(\alpha - \frac{1}{4}\big)u_n$. Nous en déduisons que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad p_n = u_n + x = \big(\alpha - \frac{1}{4}\big)^n (p_0 - x) + x.$$
Ainsi
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad p_n = u_n + x = \big(\alpha - \frac{1}{4}\big)^n \frac{4-4\alpha}{5-4\alpha} + \frac{1}{5-4\alpha}.$$

3) On a $\alpha \in]0,1[$ donc $\big|\alpha - \frac{1}{4}\big| < 1$ et donc $\big(\alpha - \frac{1}{4}\big)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Nous en déduisons que $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{5-4\alpha}$. Par ailleurs, $1 < 5 - 4\alpha < 5$ donc $\frac{1}{5-4\alpha} > \frac{1}{5}$. Cette méthode n'est pas bonne puisqu'elle ne permet pas d'arrêter de fumer avec probabilité 1 (la probabilité de fumer reste strictement positive même lorsque le nombre de jours tend vers $+\infty$).

Exercice 16 (formule du crible). Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. La formule du crible généralise la formule de Poincaré : si $A_1, \dots, A_n$ sont des événements, alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset [\![1,n]\!] \\ \mathrm{card}(J)=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right).$$

1) Écrire cette formule pour $n = 5$.
2) En déduire une formule analogue pour $\mathrm{card}(F_1 \cup \dots \cup F_n)$ où $F_1, \dots, F_n$ sont des parties d'un ensemble fini E.
3) Application : Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Un soir de pluie, n personnes se rendent au restaurant. En repartant, ils se répartissent les n parapluies qu'ils avaient laissés à l'entrée. On cherche à calculer la probabilité qu'aucun ne récupère le parapluie avec lequel il est arrivé.
   a) Déterminer un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ associé à cette expérience aléatoire. On donnera $\mathrm{card}(\Omega)$.
   b) Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, introduisons A_j l'événement « La $j^{\text{ième}}$ personne récupère son parapluie ». Soient $k \in [\![1,n]\!]$ et J une partie de $[\![1,n]\!]$ de cardinal k. Montrer que
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \frac{(n-k)!}{n!}.$$
   c) En déduire que la probabilité qu'aucune des personnes du repas ne récupère le parapluie avec lequel il est arrivé est $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.
   Nous verrons au second semestre que cette probabilité tend vers $\frac{1}{e}$ lorsque n tend vers ∞.

4) *Pour les plus courageux :* montrer la formule du crible (par récurrence).

Correction :

1) Supposons que $n = 5$. La formule devient

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_4) + \mathbb{P}(A_5) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)\\ &- \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_4) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_5) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_4) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_5) -\\ &\mathbb{P}(A_3 \cap A_4) - \mathbb{P}(A_3 \cap A_5) - \mathbb{P}(A_4 \cap A_5) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_5)\\ &+ \mathbb{P}(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_3 \cap A_5) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_4 \cap A_5) + \mathbb{P}(A_2 \cap A_3 \cap A_4) + \mathbb{P}(A_2 \cap A_3 \cap A_5)\\ &+ \mathbb{P}(A_2 \cap A_4 \cap A_5) + \mathbb{P}(A_3 \cap A_4 \cap A_5) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5)\\ &- \mathbb{P}(A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)\\ &+ \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5).\end{aligned}$$

2) En considérant $\mathbb{P}$ l'équiprobabilité et en multipliant par $\operatorname{card}(\Omega)$, on obtient

$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset [\![1,n]\!] \\ \operatorname{card}(J)=k}} \operatorname{card}\left(\bigcap_{j \in J} F_j\right).$$

3) a) Supposons que les personnes et les parapluie soient numérotées avec des entiers de 1 à n et que le numéro d'une personne et de son parapluie est le même. Un répartition des parapluie peut être codée par une permutation de $[\![1,n]\!]$. On considère donc Ω l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$ (dont le cardinal est $n!$) muni de $\mathcal{P}(\Omega)$ et de l'équiprobabilité.

b) Soient $k \in [\![1,n]\!]$ et J une partie de $[\![1,n]\!]$ de cardinal k. On a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \frac{\operatorname{card}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right)}{\operatorname{card}(\Omega)} = \frac{(n-k)!}{n!},$$

car les éléments de $\displaystyle\bigcap_{j \in J} A_j$ sont les permutations laissant fixe les k éléments de J (que l'on peut voir comme une permutation des $n-k$ éléments n'étant pas dans J).

c) La formule du crible entraîne alors que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset [\![1,n]\!] \\ \operatorname{card}(J)=k}} \frac{(n-k)!}{n!}\\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{(n-k)!}{n!} \sum_{\substack{J \subset [\![1,n]\!] \\ \operatorname{card}(J)=k}} 1\\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} \frac{(n-k)!}{n!} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.\end{aligned}$$

d) **Cette démonstration offre un bel exemple de preuve par récurrence et de manipulation de sommes. Elle n'est absolument pas exigible et elle n'est à étudier que si vous avez déjà tout compris précédemment**.

Montrons la formule du crible par récurrence forte sur n. Si $n = 1$ alors

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset [\![1,n]\!] \\ \operatorname{card}(J)=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = (-1)^2 \sum_{\substack{J \subset \{1\} \\ \operatorname{card}(J)=1}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \operatorname{card}(A_1).$$

Supposons que la propriété soit vraie jusqu'au rang n, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons-là au rang $n+1$: donnons-nous $A1, \dots, A_{n+1}$ des ensembles. La formule de Poincaré entraîne que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right).\end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence entraîne que

$$\begin{aligned}-\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right) &= -\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset [\![1,n]\!] \\ \operatorname{card}(J)=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} (A_j \cap A_{n+1})\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+2} \sum_{\substack{J \subset [\![1,n+1]\!] \\ n+1 \in J,\, \operatorname{card}(J)=k+1}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) \\ &= \sum_{p=2}^{n+1} (-1)^{p+1} \sum_{\substack{J \subset [\![1,n+1]\!] \\ n+1 \in J,\, \operatorname{card}(J)=p}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right),\end{aligned}$$

en ayant fait le changement de variable $p = k+1$. On a aussi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset [\![1,n]\!] \\ \operatorname{card}(J)=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset [\![1,n+1]\!] \\ n+1 \notin J,\, \operatorname{card}(J)=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= \sum_{k=1}^{n+2} \mathbb{P}(A_k) + (-1)^{n+2} \mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leqslant j \leqslant n+1} A_j\right) \\ &\quad + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k+1} \left(\sum_{\substack{J \subset [\![1,n+1]\!] \\ n+1 \in J,\, \operatorname{card}(J)=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) + \sum_{\substack{J \subset [\![1,n+1]\!] \\ n+1 \notin J,\, \operatorname{card}(J)=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+2} \mathbb{P}(A_k) + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset [\![1,n+1]\!] \\ \operatorname{card}(J)=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) + (-1)^{n+2} \mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leqslant j \leqslant n+1} A_j\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset [\![1,n+1]\!] \\ \operatorname{card}(J)=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right)\end{aligned}$$

D'où le résultat par récurrence.