Feuille d'exercice n° 9

Probabilités sur un univers fini

I Calculs de probabilités

Dans les exercices suivants, on commencera par déterminer un univers Ω associé à l'expérience aléatoire. Avant de calculer une probabilité, on décrira au mieux les événements à l'aide d'opérations sur les ensembles.

Exercice 1. On considère $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient A, B, C et D des événements. En utilisant les opérations ensemblistes, décrire les événements suivants :

1) « L'un au moins des événements A, B, C, D est réalisé ».
2) « Tous les événements A, B, C, D sont réalisés ».
3) « Aucun des événements A, B, C, D n'est réalisé ».
4) « B et C ne sont pas réalisés ».
5) « L'un des événements B et D et un seul est réalisé ».
6) « Si A est réalisé, alors B et D sont réalisés ou C n'est pas réalisé ».
7) « Exactement deux événements parmi A, B, C, D sont réalisés ».

Exercice 2. On jette un dé pipé dont les probabilités d'occurrence de $1, 2, 3, 4, 5, 6$ sont respectivement

$$p_1 = \frac{1}{12}, p_2 = \frac{1}{6}, p_3 = \frac{1}{12}, p_4 = \frac{1}{6}, p_5 = \frac{1}{6}, p_6 = \frac{1}{3}.$$

1) Construire un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ fini qui modélise cette expérience aléatoire.
2) Décrire chacun des événements suivants comme des parties de Ω et calculer leurs probabilités :
   a) « Le chiffre est impair ».
   b) « Le chiffre est supérieur à 2 ».
   c) « Le chiffre est impair et inférieur à 4 ».
   d) « Le chiffre est impair ou inférieur à 4 ».

Exercice 3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\mathbb{P}$ une fonction définie sur $\Omega = \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ telle que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(\{k\}) = \alpha k \binom{n}{k}$. A quelle condition sur $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $\mathbb{P}$ définit-elle une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$?

Exercice 4. Une séquence d'ADN est une suite de quatre nucléotides dénotés A, C, G, T.

1) Si chaque nucléotide est équiprobable, quelle est la probabilité d'obtenir une séquence de longueur 13 contenant exactement cinq A ?
2) Quelle est la probabilité d'obtenir une séquence avec $A, A, A, G, G, G, G, G, T, T, T, T, C$?

Exercice 5 (Le problème du chevalier de Méré). En 1654, le chevalier de Méré, philosophe et homme de lettres posa le problème suivant au mathématicien Blaise Pascal : « Qu'est-ce qui est le plus probable : obtenir au moins un six en quatre lancers d'un dé, ou obtenir au moins un double six en lançant vingt-quatre fois deux dés ? ». Étudier ce problème.

Exercice 6. Une entreprise réceptionne périodiquement des lots de pièces destinées à des assemblages. Pour contrôler la qualité d'un lot de taille n, elle échantillonne r pièces ($r < n$). En supposant que le lot contienne k pièces défectueuses ($k \leqslant n$), quelle est la probabilité de trouver m pièces défectueuses dans l'échantillon examiné ($m \leqslant r$) ?

Exercice 7 (Le problème des anniversaires). On considère une classe de n élèves, avec $n < 365$. On suppose que tous les élèves sont nés une année de 365 jours et que les naissances sont réparties de façon équiprobables dans l'année.

1) Quelle est la probabilité qu'au moins deux étudiants aient la même date d'anniversaire ?
2) A partir de quelle valeur de n cette probabilité est supérieure à 50% ? Supérieure à 75%.
3) Commenter l'hypothèse d'équirépartition des naissances dans l'année. Comment évoluerait la probabilité ci-dessus si l'on faisait une hypothèse plus réaliste (sans faire de calculs) ?
4) Combien de personnes doit-on interroger pour que la probabilité que l'une d'entre elles partage votre date d'anniversaire soit supérieure à 50% ?

II Probabilités conditionnelles et indépendance

Exercice 8. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilité fini.

1) Que dire sur deux événements A et B qui sont à la fois incompatibles et indépendants ?
2) Montrer que, si A est un événement presque sûr (i.e. $\mathbb{P}(A) = 1$) ou négligeable (i.e. $\mathbb{P}(A) = 0$), alors A est indépendant de tout événement dans $\mathcal{P}(\Omega)$.
   En particulier un événement presque sûr ou négligeable est indépendant de lui même.

Exercice 9. On dispose de deux urnes U et V. L'urne U contient 3 boules rouges, 7 boules bleues et 2 boules jaunes. L'urne V contient 2 boules rouges, 5 boules bleues et 1 boule jaune. On considère l'expérience suivante : on tire au hasard une boule de l'urne U et, sans la regarder, on la place dans l'urne V. On tire alors une boule dans V et on regarde sa couleur.

1) a) Calculer les probabilités respectives de piocher une boule rouge, bleue et jaune.
   b) On a tiré une boule bleue dans l'urne V. Quelle est la probabilité d'avoir pioché aussi une boule bleue dans l'urne U ?
2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On réalise n fois cette expérience dans les mêmes conditions et indépendamment. Quelle est la probabilité que l'on ait tiré une boule rouge dans l'urne V pour la première fois au $n^{\text{ième}}$ tirage ?

Exercice 10. Les téléviseurs d'un magasin d'électroménager proviennent de deux fournisseurs A et B. Une enquête révèle que 95% (respectivement 99%) des téléviseurs fournies par la société A (respectivement la société B) sont en état de fonctionnement. Elle révèle que un téléviseur sur 48 est abimé lors de la livraison au client. Enfin on sait que la société A fournit 3 fois plus de téléviseurs que la société B. Monsieur Durand vient de se faire livrer un téléviseur défectueux provenant de ce magasin. Quelle est la probabilité que le téléviseur ait été abimé lors de la livraison ? Quelle est la probabilité que le téléviseur ait été fourni déjà défectueux par la société A ?

Exercice 11. On dispose de 12 pièces numérotées de 1 à 12 et on suppose que, pour tout $k \in [\![1, 12]\!]$, la $k^{\text{ième}}$ pièce tombe sur FACE avec probabilité $\dfrac{k}{12}$. On lance une pièce au hasard et on obtient PILE. Quelle est la probabilité d'avoir lancé la sixième pièce ?

Exercice 12. Catherine a un garçon atteint de dystrophie musculaire de Duchenne (DMD). Il s'agit d'une maladie due à une mutation récessive liée au sexe, et entraînant un déficit complet de la production de dystrophine. Seuls les hommes porteurs de cette mutation sont atteints, tandis que les femmes sont conductrices. Les femmes conductrices ont un risque de 50% de transmettre l'allèle muté à leur descendance : les fils d'une femme conductrice ont 50% de risque d'être atteints et les filles d'une femme conductrice ont 50 % de risque d'être conductrices. Cependant, le taux de mutation spontanée est élevé : 1/3 des cas de DMD surviennent chez des garçons de mères non porteuses de la mutation. Il existe un test clinique qui est positif avec probabilité 0.7 si une femme est conductrice et positif avec probabilité 0.1 si elle ne l'est pas. Le test de Catherine est positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit conductrice ?

Exercice 13. On dispose d'un circuit composé de de trois composants électroniques A, B et C dont les probabilités de fonctionnement sont respectivement α, β et γ. On suppose les composants sont en état de fonctionnement indépendamment les uns des autres. Quel est la probabilité que le circuit fonctionne :

— lorsque les composants sont montés en série.

— lorsque les composants sont montés en parallèle.

— lorsque A est monté en série avec le sous-circuit constitué de B et C montés en parallèle.

Exercice 14 (Le problème de Monty Hall). Il s'agit d'un casse-tête probabiliste librement inspiré du jeu télévisé américain *Let's Make a Deal*, présenté pendant treize ans par Monty Hall. Voici son énoncé : un candidat est placé devant trois portes. Derrière une des portes se trouve une voiture, derrière les deux autres se trouve une chèvre. Le candidat choisit une des trois portes sans l'ouvrir. L'animateur (qui sait où se trouve la voiture) ouvre l'une des portes restantes derrière laquelle se trouve une chèvre. Le candidat a alors le choix entre conserver la porte initiale ou changer pour prendre la porte fermée restante. Quel choix doit-il faire ?

Exercice 15. On dispose d'un sac opaque de billes dont 9 rouges, 5 vertes et 7 bleues. On pioche cinq billes au hasard successivement et sans remise. Calculer la probabilité de piocher

1) uniquement des billes d'une même couleur.
2) uniquement des billes bleues sachant que toutes les billes sont de la même couleur.
3) trois boules d'une couleur et deux d'une autre couleur.
4) au moins une bille de chaque couleur.
5) trois billes rouges sachant que les trois couleurs sont piochées.

Reprendre cet exercice avec des tirages avec remise.

Exercice 16. Un fumeur veut arrêter de fumer. S'il réussit à ne pas fumer un jour, alors il reste motivé le lendemain et il a 3 chances sur 4 de ne pas fumer. Par contre, s'il fume un jour, alors le lendemain il fume avec probabilité $\alpha \in]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note p_n la probabilité qu'il fume le $n^{\text{ième}}$ jour. On suppose que $p_0 = 1$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et α.
2) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de p_n en fonction de n, α et p_0.
3) Déterminer la limite de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si elle existe. Cette limite éventuelle peut-elle être nulle ? Dans le cas où la limite existe et n'est pas nulle, donnez-en en une borne inférieure. Cette stratégie vous semble-t-elle judicieuse pour arrêter de fumer ?

Exercice 17. Un élève d'ECS1B a le choix entre deux bus pour se rendre au lycée : le bus 53 et le bus 94. Le bus 53 (respectivement 94) a une probabilité $\alpha \in]0,1[$ (respectivement $\beta \in]0,1[$) d'être en retard. La jour de la rentrée l'élève tire à pile ou face pour choisir lequel des bus il prend. Les jours suivants il utilise le même bus que la veille si celui-ci étant à l'heure, sinon il change.

1) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'événement « L'élève prend le bus 53 le $k^{\text{ième}}$ jour ». Calculer $\mathbb{P}(A_k)$ en fonction de k, α et β.
2) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité p_k pour que le bus emprunté le $k^{\text{ième}}$ jour soit à l'heure.
3) Étudier la convergence $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Exercice 18 (formule du crible). Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. La formule du crible généralise la formule de Poincaré : si $A_1, \dots, A_n$ sont des événements, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset [\![1,n]\!] \\ \operatorname{card}(J)=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right).$$

1) Écrire cette formule pour $n = 5$.
2) En déduire une formule analogue pour $\operatorname{card}(F_1 \cup \cdots \cup F_n)$ où $F_1, \dots, F_n$ sont des parties d'un ensemble fini E.
3) Application : Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$. Un soir de pluie, n personnes se rendent au restaurant. En repartant, ils se répartissent les n parapluies qu'ils avaient laissés à l'entrée. On cherche à calculer la probabilité qu'aucun ne récupère le parapluie avec lequel il est arrivé.
   a) Déterminer un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ associé à cette expérience aléatoire. On donnera $\operatorname{card}(\Omega)$.
   b) Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, introduisons A_j l'événement « La $j^{\text{ième}}$ personne récupère son parapluie ». Soient $k \in [\![1, n]\!]$ et J une partie de $[\![1, n]\!]$ de cardinal k. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \frac{(n-k)!}{n!}.$$

   c) En déduire que la probabilité qu'aucune des personnes du repas ne récupère le parapluie avec lequel il est arrivé est $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
   Nous verrons au second semestre que cette probabilité tend vers $\frac{1}{e}$ lorsque n tend vers ∞.
4) *Pour les plus courageux :* montrer la formule du crible (par récurrence).