Correction de quelques exercices de la feuille de TD 8

Exercice 3. On tire 5 cartes d'un jeu de 52 cartes. On obtient ce qu'on appelle une main.

1) Combien y a-t-il de mains possibles ?
2) Combien y a-t-il de mains avec
   a) uniquement des figures ?
   b) deux piques, un cœur et deux carreaux
   c) exactement un trèfle ?
   d) au moins un valet ?
   e) au moins une dame et un 9 ?
   f) exactement deux rois et deux cœurs ?

Correction :

1) Il y a $\binom{52}{5} = 2598960$ mains possibles.
2) a) En tout il y a 12 figures. Il y a donc $\binom{12}{5} = 792$ mains possibles avec uniquement des figures.
   b) Il y a $\binom{13}{2}$ choix pour les piques, $\binom{13}{2}$ choix pour les carreaux et 13 choix pour le cœur. Par conséquent il y a $\binom{13}{2}\binom{13}{2}\binom{13}{1} = 79092$ mains possibles avec deux piques, un cœur et deux carreaux.
   c) Il y a 13 choix pour le trèfle, puis on choisit les quatre autres cartes parmi les 39 restantes (on ne peut pas choisir d'autre trèfle). Il y a donc $13\binom{39}{4} = 886656$ mains possibles avec exactement un trèfle.
   d) Comptons plutôt le nombre de mains n'ayant aucun valet. Il y en a $\binom{48}{5}$. Par conséquent il y a $\binom{52}{5} - \binom{48}{5} = 1069263$ mains possibles avec au moins un valet.
   e) Notons E l'ensemble des mains possibles, D l'ensemble des mains avec au moins une dame, N l'ensemble des mains avec au moins un neuf. On cherche $\mathrm{card}(D\cap N) = \mathrm{card}(E) - \mathrm{card}(\overline{D}\cup\overline{N})$. Or la formule de Poincaré donne
   $$\mathrm{card}(\overline{D}\cup\overline{N}) = \mathrm{card}(\overline{D}) + \mathrm{card}(\overline{N}) - \mathrm{card}(\overline{D}\cap\overline{N}) = \binom{48}{5} + \binom{48}{5} - \binom{44}{5}.$$
   Par conséquent il y a $\binom{52}{5} - 2\binom{48}{5} + \binom{44}{5} = 260360$ mains possibles avec au moins une dame et un 9.
   f) Pour compter le nombre de mains possibles avec exactement deux rois et deux cœurs, différencions le cas où il y a le roi de cœur et le cas où il n'y est pas.
      - Il y a $\binom{3}{2} \times \binom{12}{2} \times 36$ mains possibles avec deux rois et deux cœurs mais pas le roi de cœur. En effet : on choisit deux rois parmi 3, deux cœurs parmi 12, et il reste ensuite 36 cartes possibles (car on ne peut plus piocher ni roi ni cœur) pour la dernière carte.
      - Il y a $1 \times 3 \times 12 \times \binom{36}{2}$ mains possibles avec deux rois et deux cœurs dont le roi de cœur. En effet : on choisit le roi de cœur, puis un roi parmi les 3 autres, puis un cœur parmi les 12 autres, et il reste ensuite $\binom{36}{2}$ choix (car on ne peut plus piocher ni roi ni cœur) pour les deux dernières cartes

Puisque ces deux cas de figure sont disjoints, on obtient qu'il y a

$$36\binom{3}{2}\binom{12}{2}+36\binom{36}{2}=29808$$

mains possibles avec exactement deux rois et deux cœurs.

Exercice 8. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$. Combien y a-t-il de chemins sur $\mathbb{Z}^2$ issus de $(0,0)$, faisant des pas $(1,0)$ ou $(0,1)$, et finissant en (n,k) ?

Correction : Un tel chemin doit faire $n+k$ pas, dont n fois $(1,0)$ et k fois $(0,1)$. Il suffit donc de choisir parmi les $n+k$ pas possibles la position des n qui font $(1,0)$. Le nombre total vaut donc $\binom{n+k}{n}$.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quel est le cardinal moyen d'un sous-ensemble de $[\![1,n]\!]$?

Correction : Le cardinal moyen S_n d'un sous-ensemble de $[\![1,n]\!]$ est donné par la formule

$$S_n=\frac{1}{\mathrm{card}(\mathcal{P}([\![1,n]\!])}\sum_{A\in\mathcal{P}([\![1,n]\!])}\mathrm{card}(A)=\frac{1}{2^n}\sum_{A\in\mathcal{P}([\![1,n]\!])}\mathrm{card}(A).$$

Première méthode : On regroupe un ensemble avec son complémentaire. On a :

$$\begin{aligned}S_n=\frac{1}{2^n}\sum_{A\in\mathcal{P}([\![1,n]\!])}\mathrm{card}(\overline{A})&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}\sum_{A\in\mathcal{P}([\![1,n]\!])}\mathrm{card}(A)+\frac{1}{2^n}\sum_{A\in\mathcal{P}([\![1,n]\!])}\mathrm{card}(\overline{A})\right)\\&=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{A\in\mathcal{P}([\![1,n]\!])}\big(\underbrace{\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(\overline{A})}_{=n}\big)=\frac{1}{2^{n+1}}2^n n=\frac{n}{2}.\end{aligned}$$

Seconde méthode : On a aussi

$$S_n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{\substack{A\in\mathcal{P}([\![1,n]\!])\\ \mathrm{card(A)=k}}}\mathrm{card}(A)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k=\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}n=\frac{n}{2^n}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}$$

et on trouve à nouveau $S_n=n/2$.

Exercice 12. Montrer (par double comptage) que, pour tous entiers naturels p et n tels que $p \leqslant n$,

$$\sum_{k=p}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{p}=\binom{n}{p}2^{n-p}.$$

Correction : On va procéder à un double comptage en comptant le nombre N de sous-ensembles A,B de $[\![1,n]\!]$ tels que $A\subset B$ et $\mathrm{card}(A)=p$.

- D'une part, pour construire A et B on peut d'abord choisir A de cardinal p ($\binom{n}{p}$ choix), puis rajouter un sous-ensemble quelconque de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ privé des éléments de A, (cet ensemble possède $n-p$ éléments, ce nombre étant indépendant du choix de A, donc il y a 2^{n-p} choix). Ainsi $N=\binom{n}{p}2^{n-p}$.
- D'autre part, pour construire A et B on peut d'abord choisir B de cardinal quelconque entre p et n (si B est de cardinal k, il y a $\binom{n}{k}$ choix), puis choisir A de cardinal p comme sous-ensemble de B ($\binom{k}{p}$ choix si B est de cardinal k). Ainsi $N=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m}$.

Exercice 13. Montrer (avec des arguments combinatoires) que, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\forall p\in[\![0,n]\!],\qquad \sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}.$$

Correction : Remarquons d'abord que, si on choisit $p+1$ éléments distincts parmi $n+1$ alors, le maximum d'entre eux appartient à $[\![p+1,n+1]\!]$. Pour choisir $p+1$ entiers distincts de $[\![1,n+1]\!]$, on peut d'abord choisir le maximum $k+1 \in [\![p+1,n+1]\!]$ d'entre eux, puis choisir arbitrairement les p autres entiers dans $[\![1,k]\!]$. Le nombre de possibilités est donc

$$\binom{p}{p}+\binom{p+1}{p}+\cdots+\binom{n}{p}.$$

De manière plus rigoureuse, on écrit que l'ensemble des parties de $[\![1,n+1]\!]$ ayant $p+1$ éléments s'écrit comme l'union disjointe des ensembles

$$A_k=\left\{(a_1,\ldots,a_p,k+1)\in\mathbb{N}^{p+1}\,\middle|\,1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_p\leqslant k\right\},\qquad k\in[\![p,n]\!].$$

Exercice 14 (formule de Vandermonde). Soient p et q deux entiers naturels.

1) En utilisant le fait que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $(1+x)^p(1+x)^q=(1+x)^{p+q}$, montrer que

$$\forall r\in[\![0,p+q]\!],\qquad \binom{p+q}{r}=\sum_{k=0}^{r}\binom{p}{k}\binom{q}{r-k}.$$

2) Donner une démonstration combinatoire de cette égalité.

Correction :

1) Soit $x\in\mathbb{R}$. La formule du binôme de Newton entraîne que

$$\sum_{k=0}^{p+q}\binom{p+q}{k}x^k=(1+x)^{p+q}=(1+x)^p(1+x)^q=\left(\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{q}\binom{q}{j}x^j\right).$$

Nous sommes en présence d'un produit de sommes. On peut donc le réécrire sous la forme d'une somme double (cf. formule de développement/factorisation vue en cours) :

$$\sum_{k=0}^{p+q}\binom{p+q}{k}x^k=\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant p\\0\leqslant j\leqslant q}}\binom{p}{i}\binom{q}{j}x^{i+j}.$$

Soit $r\in[\![0,p+q]\!]$. On remarque que $\binom{p+q}{r}$ est le coefficient du terme de degré r dans le polynôme $\sum_{k=0}^{p+q}\binom{p+q}{k}X^k$. Regardons à présent le coefficient du terme de degré r dans le polynôme $\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant p\\0\leqslant j\leqslant q}}\binom{p}{i}\binom{q}{j}X^{i+j}$. Dans cette somme double, les termes d'indices (i,j) tels que $X^{i+j}=X^r$ sont tels que $i\in[\![0,p]\!]$ et $j=r-i$. Par conséquent le coefficient du terme de degré r est $\sum_{k=0}^{r}\binom{p}{k}\binom{q}{r-k}$.

Nous en déduisons la formule par unicité des coefficients d'un polynôme à coefficients réels.

2) Supposons que l'on dispose de deux ensembles A et B disjoints de cardinaux respectifs p et q. Soit $r\in[\![0,p+q]\!]$. Remarquons que choisir r élément de $A\cup B$ revient à choisir un certain nombre (disons $k\in[\![0,r]\!]$) d'éléments dans A et le reste ($r-k$ éléments) dans B. Ces k façons de choisir étant disjointes, nous obtenons la formule.

De manière plus rigoureuse, on introduit E_r l'ensemble des parties de $A\cup B$ à r éléments. On a $\operatorname{card}(E_r)=\binom{p+q}{r}$. Pour tout $k\in[\![0,r]\!]$, on note $F_{k,r}$ l'ensemble des couples composés d'une partie de A à k éléments et d'une partie de B à $r-k$ éléments. Nous avons $\operatorname{card}(F_{k,r})=\binom{p}{k}\binom{q}{r-k}$.

La formule de Vandermonde découle du fait que $E_r=\bigcup_{k=0}^{r}F_{k,r}$ est une union disjointe.

Exercice 15. Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$. Dénombrer

1) le nombre de façons de placer p pièces identiques dans n poches différentes.

   Indice : on peut coder une configuration où l'on a placé p pièces dans n poches par une succession de $\circ$ et de $|$ de la façon suivante : on place autant de $\circ$ que de pièces dans la première poche, puis on place un $|$, ensuite on place autant de $\circ$ que de pièces dans la deuxième poche, puis on place un $|$, etc. Par exemple, si on a 6 pièces et 4 poches, $\circ\circ\circ|\circ||\circ\circ$ code le fait qu'il y a 3 pièces dans la première poche, 1 pièce dans la deuxième, aucune dans la troisième et 2 dans la quatrième.

2) le nombre de façons de placer p pièces identiques dans n poches différentes de sorte qu'aucune poche ne soit vide.

3) le nombre de tirages successifs et avec remise de p boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

4) le nombre de n-uplets $(r_1, \dots, r_n)$ d'éléments de $[\![0, p]\!]$ tels que $r_1 + \cdots + r_n = p$.

5) le nombre d'applications croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

Correction :

1) Il s'agit du nombre de façons de placer $n-1$ barres $|$ parmi $p+n-1$ positions possibles (ou encore du nombre de façons de placer p pièces $\circ$ parmi $p+n-1$ positions possibles), c'est-à-dire $\binom{p+n-1}{n-1} = \binom{p+n-1}{p}$.

2) Si $p < n$ alors il n'est pas possible de placer les pièces de sorte qu'aucune poche ne soit vide. Supposons que $p \geqslant n$. Placer p pièces identiques dans n poches différentes de sorte qu'aucune poche ne soit vide revient à placer une pièce dans chaque poche puis de placer les $p-n$ pièces restantes dans les n poches. Il y a donc $\binom{n+(p-n)-1}{p-n} = \binom{p-1}{p-n}$ façons de placer p pièces identiques dans n poches différentes de sorte qu'aucune poche ne soit vide.

3) On tire p boules avec remise. On peut imaginer qu'il y a n poches et que l'on met les boules tirées numérotées 1 dans la poche 1, les boules tirées numérotées 2 dans la poche 2, etc. Le nombre de tirages successifs avec remise de p boules dans cette urne est donc égal au nombre de façons de placer p boules dans n poches différentes, c'est-à-dire $\binom{p+n-1}{p}$.

4) Il y a $\binom{n+p-1}{p}$ n-uplets vérifiant cette condition. En effet, remarquons que

$$p = r_1 + r_2 + \cdots + r_n = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{r_1 \text{ fois}} + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{r_2 \text{ fois}} + \cdots + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{r_n \text{ fois}}.$$

   Ainsi on se ramène à la situation précédente : ici les 1 jouent les rôles des pièces, on a n poches et on cherche à savoir combien il y a de façons de mettre r_1 pièces dans la première poche, r_2 dans la deuxième, etc. On trouve à nouveau $\binom{p+n-1}{p}$ façons possibles.

5) Encore une fois, on peut imaginer qu'il y a n poches. Si $f : [\![1, p]\!] \longrightarrow [\![1, n]\!]$ est croissante alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on place autant de pièces que d'antécédents de i par f. Réciproquement si on a p pièces réparties dans n poches alors on construit une unique $f : [\![1, p]\!] \longrightarrow [\![1, n]\!]$ croissante de la façon suivante :

   - Si il y a k_1 pièces dans la première poche alors, on pose $f(1) = \cdots = f(k_1) = 1$,
   - Si il y a k_2 pièces dans la deuxième poche alors, on pose $f(k_1+1) = \cdots = f(k_1+k_2) = 1$, etc

   On trouve à nouveau $\binom{p+n-1}{p}$ façons possibles.