Feuille d'exercice n$^{\text{o}}$ 8

Combinatoire

Exercice 1. En France, à tout véhicule est attribué un numéro d'immatriculation (SIV) formé de sept caractères alphanumériques : deux lettres, un tiret, trois chiffres, un tiret et deux lettres (par exemple "KZ-119-EP"). Les lettres interdites sont I, O et U (car elles sont trop ressemblantes avec 1, 0 et V respectivement). La série de chiffres 000 est interdite, ainsi que la série de lettres SS. Enfin la série WW est interdite pour le bloc de gauche (elle correspond aux immatriculations provisoires).

1) Combien y a-t-il d'immatriculations possibles ?
2) Combien y a-t-il d'immatriculations ne contenant aucune lettre ni chiffre dupliqué ?

Exercice 2. Combien y a-t-il de mots utilisant l'alphabet latin (ayant un sens ou non) composés

1) de cinq lettres ?
2) de cinq lettres distinctes ?
3) de cinq lettres avec un y ?
4) de cinq lettres formant un palindrome ?
5) de cinq lettres distinctes et dans l'ordre alphabétique ?
6) de cinq lettres avec exactement 2 voyelles ?

Exercice 3. On tire 5 cartes d'un jeu de 52 cartes. On obtient ce qu'on appelle une main.

1) Combien y a-t-il de mains possibles ?
2) Combien y a-t-il de mains avec
   a) uniquement des figures ?
   b) deux piques, un cœur et deux carreaux
   c) exactement un trèfle ?
   d) au moins un valet ?
   e) au moins une dame et un 9 ?
   f) exactement deux rois et deux cœurs ?

Exercice 4. On dispose d'une urne avec 4 boules bleues, 6 boules rouges et 7 boules jaunes. On suppose que les boules sont numérotées (de telle sorte que l'on puisse les distinguer). On tire 5 boules dans l'urne.

1) Quel est le nombre de tirages simultanés donnant 2 bleues, 2 rouges et 1 jaune ?
2) Quel est le nombre de tirages successifs et sans remise donnant 2 bleues, 2 rouges et 1 jaune ?
3) Quel est le nombre de tirages successifs et sans remise donnant 2 bleues, 2 rouges et 1 jaune dans cet ordre ?
4) Reprendre ces trois questions dans le cas où les boules sont indiscernables et ajouter le cas où les tirages se font avec remise.

Exercice 5. Combien y a-t-il d'anagrammes (ayant un sens ou non) de chacun de ses mots : BOWIE, MAISON, POSSIBLE, ANAGRAMME, LEDZEPPELIN, MISSISSIPPI ?

Exercice 6. Une étagère comporte 15 DVD distincts dont 6 films de science fiction, 7 thrillers et 2 biopics. Combien y a-t-il de façons de ranger cette étagère ? Qu'en est-il si on impose un rangement par genre ? Et si on souhaite seulement que les thrillers soient groupés ?

Exercice 7. Dans un ciné-club, 45 membres ont vu au moins un des trois films de Hitchcock *Vertigo*, *Psycho* et *Rear Window*. On sait que 33 d'entre eux ont vu *Vertigo*, 30 ont vu *Psycho* et 19 ont vu *Rear Window*. On sait aussi que 22 ont vu à la fois *Vertigo* et *Psycho*, 13 ont vu à la fois *Psycho* et *Rear Window*, 8 ont vu à la fois *Vertigo* et *Rear Window*. Combien de membres ont vu les trois films ?

Exercice 8. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$. Combien y a-t-il de chemins sur $\mathbb{Z}^2$ issus de $(0,0)$, faisant des pas $(1,0)$ ou $(0,1)$, et finissant en (n,k) ?

Exercice 9. Quatre amis se retrouvent au restaurant un soir de pluie. En repartant, ils se répartissent les quatre parapluies qu'ils avaient laissés à l'entrée. Combien y a-t-il de répartitions de telle manière qu'aucun ne récupère le parapluie avec lequel il est arrivé ?
On pourra introduire, pour tout $i \in [\![1,4]\!]$, l'ensemble A_i des répartitions pour lesquelles la $i^{\text{ième}}$ personne récupère son parapluie.

Exercice 10. Soient n et p des entiers naturels non nuls tels que $p \geqslant n$. On répartit p boules numérotées de 1 à p dans n sacs numérotés de 1 à n.

1) Quelle est le nombre de répartitions possibles ?
2) Pour $n \in \{2,3,4\}$, déterminer le nombre de répartitions pour lesquels aucun sac n'est vide ?
   On pourra introduire, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, l'ensemble A_i des répartitions pour lesquelles le sac numéro i est vide.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quel est le cardinal moyen d'un sous-ensemble de $[\![1,n]\!]$?

Exercice 12. Montrer (par double comptage) que, pour tous entiers naturels p et n tels que $p \leqslant n$,

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{p} = \binom{n}{p} 2^{n-p}.$$

Exercice 13. Montrer (avec des arguments combinatoires) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall p \in [\![0,n]\!], \qquad \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Exercice 14 (formule de Vandermonde). Soient p et q deux entiers naturels.

1) En utilisant le fait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(1+x)^p(1+x)^q = (1+x)^{p+q}$, montrer que

$$\forall r \in [\![0,p+q]\!], \qquad \binom{p+q}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{p}{k}\binom{q}{r-k}.$$

2) Donner une démonstration combinatoire de cette égalité.

Exercice 15. Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$. Dénombrer

1) le nombre de façons de placer p pièces identiques dans n poches différentes.
   Indice : on peut coder une configuration où l'on a placé p pièces dans n poches par une succession de $\circ$ et de $|$ de la façon suivante : on place autant de $\circ$ que de pièces dans la première poche, puis on place un $|$, ensuite on place autant de $\circ$ que de pièces dans la deuxième poche, puis on place un $|$, etc. Par exemple, si on a 6 pièces et 4 poches, $\circ\circ\circ|\circ||\circ\circ$ code le fait qu'il y a 3 pièces dans la première poche, 1 pièce dans la deuxième, aucune dans la troisième et 2 dans la quatrième.
2) le nombre de façons de placer p pièces identiques dans n poches différentes de sorte qu'aucune poche ne soit vide.
3) le nombre de tirages successifs et avec remise de p boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
4) le nombre de n-uplets $(r_1,\dots,r_n)$ d'éléments de $[\![0,p]\!]$ tels que $r_1+\cdots+r_n = p$.
5) le nombre d'applications croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.